ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ნინო რაზმაძე

ფინანსური მათემატიკის ზოგიერთი ამოცანა

სამაგისტრო პროგრამის დასახელება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

ბესარიონ დოჭვირი: ფიზიკა -მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; ასოცირებული პროფესორი.

პეტრე ბაბილუა: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; ასოცირებული პროფესორი.

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,

მათემატიკის დეპარტამენტი

2021

სარჩევი

ა ნ ო ტ ა ც ი ა — 3
S u m m e r y — 4
შ ე ს ა ვ ა ლ ი — 5
§ 1 შესავალი დეტერმინისტულ და სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში — 7
ფინანსური ნაკადები, საბანკო ანგარიშები — 10
ობლიგაცია, აქცია და მათი მახასიათებლები — 11
ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასდადების ამოცანა — 13
§ 2 ფინანსური ნაკადები — 15
§ 3 ფინანსური ოპერაციები და სქემები — 27
§ 4 ფინანსური (B , S) - ბაზრის სამაქტივიანი ბინომური მოდელი — 40
§ 5 კოქსის, როსის და რუბინშტეინის ფორმულა — 42
§ 6 ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულა — 43
§ 7 მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. მინიმალური ჰეჯი — 44
§ 8 რეკურენტული ფორმულები — 45
§ 9 ბინომური ხეები — 46
§ 10 ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის ფასდადების ორნაბიჯიანი რიცხვითი მაგალითი — 47
დ ა ს კ ვ ნ ა — 55
გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ უ ლ ი ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა — 56

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

ნაშრომი კვლევითი ხასიათისაა. მასში განხილულია ფინანსური მათემატიკის პრობლემატიკა დისკრეტული დროის შემთხვევაში. შესწავლილია დეტერმინისტული და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის საკითხები, საპროცენტო განაკვეთის დროით სტრუქტურასთან და ფინანსური ბაზრის ბინომურ მოდელთან დაკავშირებული ამოცანები. ჩატარებულია გარკვეული კვლევითი სამუშაო, ევროპული ტიპის ყიდვისა და გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის ფასდადებასთან დაკავშირებით, ნაშრომი შედგება შესავლისგან, 10 პარაგრაფისგან და გამოყენებული ლიტერატურისგან.

Summery

The MSc thesis is a research nature. In this work we describe the problems of financial mathematics in the case of discrete time. Deterministic and stochastic financial mathematics issues, problems related to the temporal structure of interest rates and the binomial model of the financial market are studied. Some research work has been done on the pricing of a standard European type of buying and selling option, the paper consists of an introduction, 10 paragraphs and references.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

კარგადაა ცნობილი, რომ თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში ცენტრალური ადგილი ფულად-საკრედიტო პოლიტიკას უკავია. ამ პოლიტიკის მართვისა და კონტროლის ძირითადი ინსტრუმენტი ფინანსურ ბაზრებზე ფასიანი ქაღალდებით, მაგალითად, ობლიგაციებით, აქციებით ოპერაციებია. ეს ოპერაციები შეიცავს გარკვეულ რისკებს და საჭიროა ამ რისკების შესწავლა და ანალიზი. თავის მხრივ, ეს საკითხები მიეკუთვნება ფინანსების თეორიას, რომლის მათემატიკურ პრობლემატიკას იკვლევს ბოლო ათწლეულებში ინტენსიურად განვითარებადი სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.

ფინანსური ბაზრების სტრუქტურა საკმაოდ რთული ბუნებისაა და მისი ანალიზი დაკავშირებულია საინტერესო და მეტად რთულ მათემატიკურ ამოცანებთან, ასეთი ამოცანებია, მაგალითად, აქციებისა და სხვა აქტივების ყიდვა-გაყიდვის კონტრაქტების (მაგალითად, ოფციონის, ფორვარდის, ფიუჩერსის) სამართლიანი ფასის დადგენა, ინვესტორის ოპტიმალური სტრატეგიის აგება, საინვესტიციო პრობლემა და მრავალი სხვა. ამ ამოცანების გადაწყვეტა სწორედ ალბათურ-სტატისტიკური (სტოქასტური ანალიზის) მეთოდების გამოყენებით ხდება.

ფინანსური მათემატიკა ორი ძირითადი მიმართულებისგან შედგება: პირველი ეს არის დეტერმინისტული ანუ კლასიკური ფინანსური მათემატიკა, ხოლო მეორე-სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. ფინანსური პროცესების აღმწერ დეტერმინისტულ მათემატიკურ მოდელებში იგულისხმება დროში ცვალებადი ფინანსური ნაკადების მახასიათებლების მომავალში მნიშვნელობების სრული განსაზღვრულობა. სხვანაირად რომ ვთქვათ, გვაქვს ფინანსური ოპერაციების აღმწერი ფორმულები და დროის n=0 მომენტში საწყისი მონაცემების საფუძველზე მომავალში დროის ნებისმიერი n მომენტისათვის შეგვიძლია გამოვთვალოთ საჭირო მახასიათებლები. მარტივი და რთული პროცენტების გამოყენებით ასეთი გამოთვლები დაკავშირებულია, მაგალითად, ვექსელებთან, ობლიგაციებთან, დეპოზიტურ სერტიფიკატებთან და სხვა სავალო ფინანსურ ინსტრუმენტებთან, აგრეთვე ფინანსურ მენეჯმენტთან და სხვა.

რეალურ ფინანსურ ოპერაციებს, როგორც წესი, თან ახლავს გარკვეული რისკი და განუსაზღვრელობა, რომელიც ამ ოპერაციების მახასიათებლებზე უამრავი შემთხვევითი ფაქტორის (მაგალითად, ინფლაციის, ეკონომიკური კრიზისის, ბუნებრივი კატასტროფების) ზეგავლენით არის გამოწვეული. ამ შემთხვევაში მახასიათებლების დროში მომავალი მნიშვნელობების ცალსახად განსაზღვრა შეუძლებელია. სწორედ ამ

შემთხვევითი ფაქტორების გათვალისწინებით ხდება ფინანსური ნაკადების მახასიათებლების შესწავლა და ანალიზი ფინანსური პროცესების აღმწერ სტოქასტურ მათემატიკურ მოდელებში.

X X საუკუნის ბოლოს საქართველო დაადგა საბაზრო ეკონომიკის განვითარების გზას, ამან ბუნებრივად გამოიწვია უამრავი სოციალურ-პოლიტიკური, ეკონომიკური, მეცნიერული, პედაგოგიური და სხვა შეხედულებების ახლებურად გააზრებისა და ჩამოყალიბების აუცილებლობა.

სადიპლომო ნაშრომში შესწავლილია დეტერმინისტულ და სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის საკითხები დისკრეტული დროის შემთხვევაში და გადაწყვეტილია სხვა და სხვა საილუსტრაციო ამოცანები.

ნაშრომი შედგება 10 პარაგრაფისგან.

§ 1 შესავალი დეტერმინისტულ და სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში

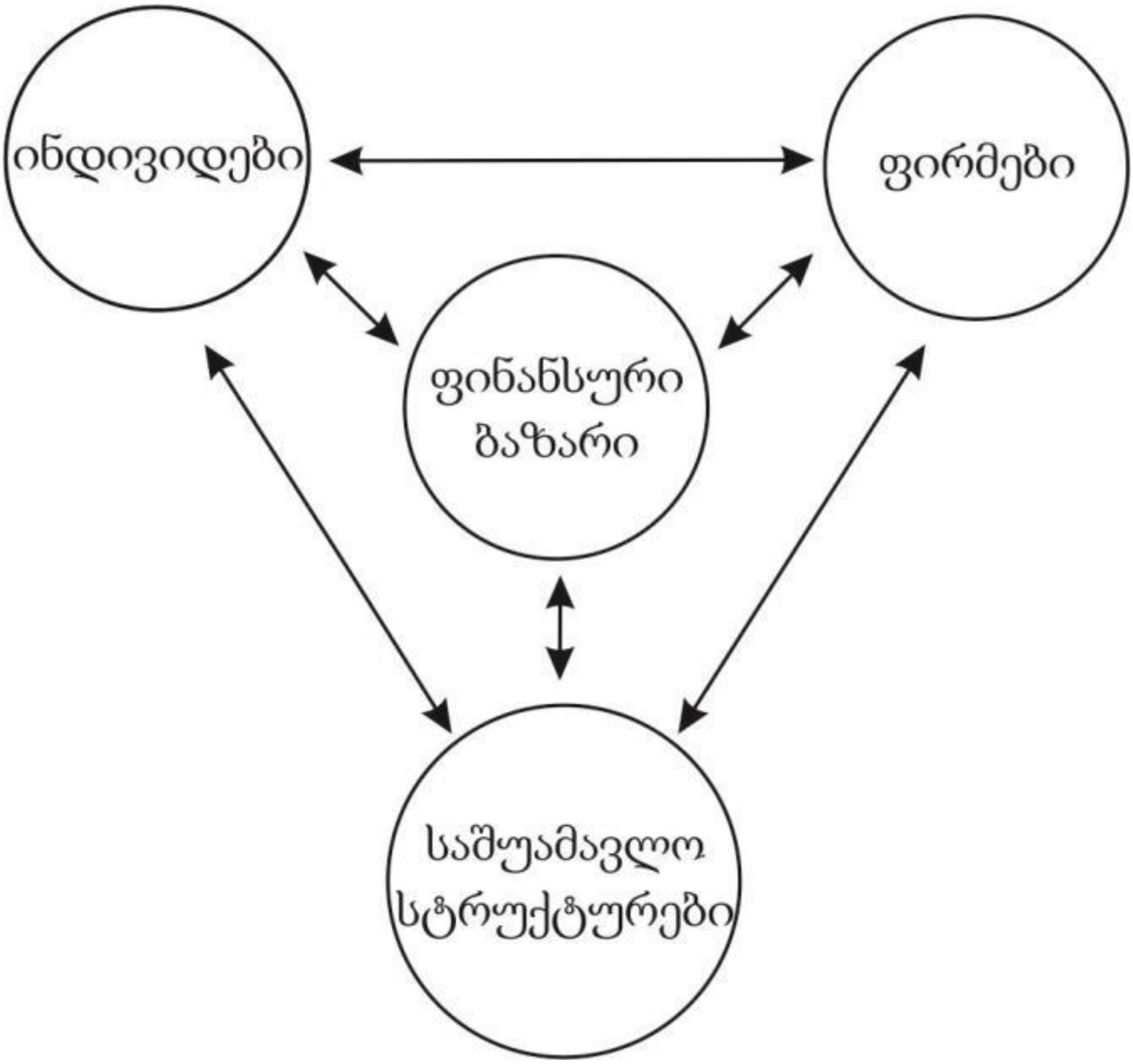
განიხილავენ შემდეგ საკვანძო ობიექტებსა და სტრუქტურებს : ინდივიდები, ფირმები, საშუამავლო სტრუქტურები, ფინანსური ბაზრები. ამ ობიექტებსა და სტრუქტურებს შორის კავშირი მოიცემა ბლოკ-სქემით (იხ. ნახაზი 1.1).

ინდივიდების, როგორც მომხმარებლების ამოცანაა „მეტი მოიხმაროს ახლა", ხოლო როგორც ინვესტორის ამოცანაა : „ახლა განახორციელოს ინვესტირება ისე, რომ მომავალში ჰქონდეს მეტი ".

ფირმებს (კომპანიებს, კორპორაციებს და ა. შ.) გააჩნია ისეთი ფასეულობები, როგორიცაა : "მიწა" , "ქარხნები" , "მანქანები " , "ორგანიზაციული სტრუქტურები" , "ბაზრები " , " პატენტები" და სხვა. მრავალი სახის საქმიანობასთან ერთად ფირმები კაპიტალის გაზრდის მიზნით უშვებენ ობლიგაციებს, აქციებს.

საშუამავლო სტრუქტურებს (ფინანსურ საშუამავლო სტრუქტურებს) წარმოადგენს ბანკები, საინვესტიციო კომპანიები, საპენსიო ფონდები, სადაზღვევო კომპანიები და სხვა.

ფინანსური ბაზარი წარმოადგენს ფულის, ვალუტის, ძვირფასი (კეთილშობილი) მეტალების, ფასიანი ქაღალდებისა და სხვა აქტივების ბაზრების ერთობლიობას. ძირითადი (საბაზისო) ქაღალდებია: საბანკო ანგარიში, ობლიგაცია, აქცია, ხოლო წარმოებული ფასიანი ქაღალდებია: ოფციონი, ფიუჩერსი, ვარანტი, სვოპი, სპრედი და სხვა. ფინანსური ინჟინერიის დანიშნულება მდგომარეობს წარმოებული ფასიანი ქაღალდებით, როგორც ფინანსური ინსტრუმენტებით, ოპერაციების ჩატარებასა და ამ ოპერაციებთან დაკავშირებული რისკების გარკვეულ განეიტრალებაში. შევნიშნავთ, რომ სიტყვა " წარმოებულის " შინაარსი შემდეგია: წარმოებული ფასიანი ქაღალდი წარმოადგენს გარკვეული სახის კონტრაქტს ძირითადი ფასიანი ქაღალდის ყიდვა-გაყიდვის შესახებ.



ნახაზი 1.1. ფინანსური ბაზარი, ობიექტები და სტრუქტურები

განვიხილოთ ფინანსური (B, S)-ბაზრის კოქსის-როსის-რუბინშტეინის ბინომური მოდელი:

$$B_n = (1+r)\, B_{n-1}\,, \quad B_0 > 0\,, \tag{1.1}$$

$$S_n = (1+\rho_n)\, S_{n-1}\,, \quad S_0 > 0\,, \tag{1.2}$$

რომელიც ორი აქტივისგან: $B=(B_n)$ საბანკო ანგარიშისა (ობლიგაცია) და $S=(S_n)$ აქციისგან, $n= 0,1, \dots, N$, შედგება. საპროცენტო განაკვეთი $r > 0$, ხოლო ρ_n დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა ორი შესაძლო მნიშვნელობით: $P(\rho_n=b)=p$, $P(\rho_n=a)=1-p=q$, ამასთან, $-1<a<r<b$.

წარმოვიდგინოთ ინვესტორი, რომლის საწყისი კაპიტალი (თანხა) დროის $n = 0$ მომენტში არის $X_0 = x > 0$. მისი ინტერესია გაზარდოს საწყისი თანხა ფინანსური ბაზრის შესაძლებლობების გამოყენებით (ობლიგაციებისა და აქციების ყიდვა-გაყიდვით) ისე, რომ მომავალში დროის ფიქსირებულ N მომენტში მაქ ჰქონდეს გარკვეული $f_N > X_0$ თანხა. ინვესტორის ამ სურვილს **ს ა ი ნ ვ ე ს ტ ი ც ი ო პ რ ო ბ ლ ე მ ა** ეწოდება.

თუ ინვესტორი საწყის თანხას განალაგებს მხოლოდ საბანკო ანგარიშზე (ობლიგაციებში), მაშინ საინვესტიციო პრობლემის გადასაწყვეტად დროის $n = 0$ მომენტში მას უნდა გააჩნდეს

$X_0 = x = (1 + r)^{-N} \cdot f_N$

საწყისი კაპიტალი.

თუ ინვესტორი საწყის თანხას განალაგებს მხოლოდ აქციებში (იყიდის მხოლოდ აქციებს), მაშინ საინვესტიციო პრობლემის გადასაწყვეტად დროის $n = 0$ მომენტში მას უნდა გააჩნდეს

$X_0 = x = [1 + (bp + aq)]^{-N} \cdot f_N$

საწყისი კაპიტალი.

ინვესტორს აქვს მესამე ვარიანტიც. ვთქვათ, $n = 0$ მომენტში ერთი ობლიგაციის ფასია B_0, ხოლო ერთი აქციის ფასია S_0 და ვიგულისხმოთ, რომ ინვესტორმა საწყისი თანხის ნაწილით იყიდა β_0 ობლიგაცია და ნაწილით γ_0 აქცია. მაშინ მისი საწყისი კაპიტალი შეიძლება ჩაიწეროს

$X_0 = X_0^\pi = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$

სახით, სადაც $\pi = \pi_0 = (\beta_0 , \gamma_0)$ წყვილი არის საინვესტიციო პორტფელი ანუ სტრატეგია. $\pi = \pi_n = (\beta_n , \gamma_n)$, n= 0,1, ..., N, სტრატეგიას ეწოდება **ჰ ე ჯ ი**, თუ $X^\pi \geq f_N$ და ეწოდება **მ ი ნ ი მ ა ლ უ რ ი ჰ ე ჯ ი**, თუ $X_N^\pi = f_N$. ამრიგად, საინვესტიციო პრობლემის გადასაწყვეტად ამ შემთხვევაში საჭიროა ისეთი $\pi^* = \pi_n^* = (\beta_n^* , \gamma_n^*)$ სტრატეგიის აგება, რომლისთვისაც დროის ბოლო N მომენტში შესრულდება

$$X_N^{\pi^*} = \beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N = f_N$$

ტოლობა.

ფინანსური ნაკადები, საბანკო ანგარიშები

ფინანსური (ფულადი) ნაკადები მნიშვნელოვნად გამოიყენება საბანკო ოპერაციების ანალიზში.

პირველი რიგის ფინანსური ნაკადი $CF = \{(t_k, C_{tk})\}$, $k = 0,1, \dots, n,$ წყვილების ერთობლიობა, სადაც t_k დროის მომენტებია, ხოლო C_{tk} ამ მომენტებში შეტანილი (გატანილი) თანხის რაოდენობაა. CF ნაკადის რიცხვზე ნამრავლი ჩაიწერება $\alpha CF = \{(t_k, \alpha C_{tk})\}$, $k = 0,1, \dots, n$, სახით; თუ გვაქვს ორი

$CF_1 = \left\{\left(t_i^{(1)}, C_{t_i}^{(1)}\right)\right\}$ $i = 0,1, \dots m,$ და $CF_2 = \left\{\left(t_k^{(2)} C_{t_k}^{(2)}\right)\right\}$ $k = 0,1, \dots, n,$

ნაკადი, მაშინ მათი $CF_1 + CF_2$ ჯამი შედგება სიდიდეებისგან: ა) პირველი და მეორე ნაკადებში დროის განსხვავებულ მომენტებში არსებული წყვილებისგან; ბ) დროის ტოლ მომენტებში თანხების ჯამისგან. თუ ეს ჯამი ნულის ტოლია, მაშინ ის ჯამში არ ჩაიწერება.

მეორე რიგის ფინანსური ნაკადი $\overline{CF} = \{(I_k, C_k)\}$, $k = 1, \dots, n$ სადაც $I_k = [t_{k-1}, t_k)$ დროის თანაუკვეთი ინტერვალებია, ხოლო C_k ინტერვალში არსებული თანხაა. ხშირად $\overline{CF}$ ნაკადი ჩაიწერება CF ნაკადის ორი სახით, რასაც **ა ქ ტ უ ა ლ ი ზ ა ც ი ა** ეწოდება: ავანსირებული და ფინალიზებული ნაკადები. შესაბამისად, ესენია: $Adv(\overline{CF}) = \{(t_{k-1}, C_k)\}$, $Fin(\overline{CF}) = \{(t_k, C_{tk})\}$, $k = 0,1, \dots, n$.

თუ $\overline{CF}$ ნაკადში დროის ინტერვალების სიგრძეები ტოლია,მაშინ ამ ნაკადს **რ ე ნ ტ ა** ეწოდება. ხდება რენტის ცალკეული წყვილების ან მთლიანად რენტის p-ჯერადი დაყოფა $D^{(p)}(\overline{CF})$ მიკრორენტად, რაც ნიშნავს, რომ დროითი ინტერვალები და შესაბამისი თანხები იყოფა p- ნაწილად. სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$Adv\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right) = D^{(p)}\left(Adv(\overline{CF})\right), \tag{1.3}$$

$$Fin\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right) = D^{(p)}\left(Fin(\overline{CF})\right), \tag{1.4}$$

ბანკში შეტანილ B_0 თანხაზე ხდება სხვა და სხვა სახის პროცენტის (სარგებლის) დარიცხვა დროის n ერთეულებში (მაგალითად, თვე, წელიწადი).

მარტივი წესით დარიცხვა

$$B_n = B_0(1 + nr). \tag{1.5}$$

რთული წესით დარიცხვა

$$B_n = B_0(1+r)^n. \tag{1.6}$$

წელიწადში $m-$ ჯერ რთული წესით დარიცხვა

$$B_n(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mn}$$

წელიწადის წილად მნიშვნელობებში $m-$ ჯერ რთული წესით დარიცხვა

$$B_{n+\frac{k}{m}}(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{m\left(n+\frac{k}{m}\right)}$$

წელიწადში უწყვეტად რთული წესით დარიცხვა

$$B_n(\infty) = B_0 e^{r(\infty)\cdot n}$$

ამასთან, $B_n(m) \to B_n(\infty)$, როცა $r(m) \to r(\infty)$, $m \to \infty$.

მარტივი ნორმირებული საპროცენტო განაკვეთი

$$i = \frac{r}{n}, \quad r = \frac{B_n - B_{n-1}}{B_{n-1}}$$

მარტივი სააღრიცხვო განაკვეთი

$$w = \frac{B_n - B_{n-1}}{B_n}$$

მარტივი ნორმირებული სააღრიცხვო განაკვეთი

$$d = \frac{w}{n}$$

სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$w = \frac{r}{1+r}, \qquad d = \frac{i}{1+in}$$

ობლიგაცია, აქცია და მათი მახასიათებლები

ო ბ ლ ი გ ა ც ი ა (ბონი) არის ვალდებულება ფასიანი ქაღალდის სახით, რომელსაც უშვებს სახელმწიფო, ბანკები, კორპორაციები, სააქციო კომპანიები და სხვა ფინანსური ინსტიტუტები კაპიტალის აკუმულაციის (მოზიდვის) მიზნით.

ობლიგაციის ძირითადი პარამეტრებია:

$P(T,T)$ ნომინალური ღირებულებაა, ანუ ობლიგაციის სიცოცხლის ხანგრძლივობის ბოლო მომენტში გადასახდელი თანხა.

T ობლიგაციის დაფარვის დროა

r_c დივიდენდები ანუ საკუპონე დარიცხვის პროცენტია

$P(0,T)$ ობლიგაციის საწყისი ფასია

$P(t,T)$ დროის t მომენტში ობლიგაციის საბაზრო ფასია

$r_c(t,T)$ მიმდინარე საპროცენტო განაკვეთია

$$r_c(t,T) = \frac{r_c \cdot P(T,T)}{P(t,T)}$$

$\rho(T-t,T)$ არის შემოსავალი პროცენტებში დარჩენილ (T-t) დროში, ხოლო თვითონ შემოსავალი ρ განისაზღვრება, როგორც

$$P(T,T) = \sum_{k=1}^{T-t} \frac{r_c \cdot P(T,T)}{(1+\rho)^k} + \frac{P(T,T)}{(1+\rho(T-t,T))^{T-t}} \qquad (1.7)$$

განტოლების ფესვი, სადაც t=1, ..., T

ა ქ ც ი ა საქმიანი (საწილო) ფასიანი ქაღალდია, რომელსაც თანხის აკუმულაციისა და გაზრდის მიზნით უშვებს კორპორაციები, ფირმები, კომპანიები და ა.შ. არსებობს აქციების ორი ძირითადი სახე : ჩვეულებრივი და პრივილეგირებული აქციები, რომელიც ერთმანეთისგან დივიდენდების გადახდითა და აქციების რისკის სხვა და სხვა ხარისხით განსხვავდება .

ლუის ბაშელიემ ექსპერიმეტული მონაცემების ანალიზის საფუძველზე შეამჩნია, რომ $S_t^{(\Delta)}$ $T = 0, \Delta, 2\Delta, \ldots$ აქციის ფასებს გააჩნია ნულოვანი საშუალო $S_t^{(\Delta)} - S_{t-\Delta}^{(\Delta)}$ ნაზრდები (სტატისტიკური აზრით) და $\left|S_T^{(\Delta)} - S_{T-\Delta}^{(\Delta)}\right|$ სიდიდის ფლუქტუაციები $\sqrt{\Delta}$ რიგისაა. ასეთი თვისება აქვს, მაგალითად, შემთხვევით ხეტიალს

$$S_t^{(\Delta)} = S_0 + \sum_{k \le \left[\frac{t}{\Delta}\right]} \xi_k^{(\Delta)} \qquad (1.8)$$

სადაც $\xi_k^{(\Delta)}$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია:

$$P = \left(\xi_k^{(\Delta)} = \sigma\sqrt{\Delta}\right) = P\left(\xi_k^{(\Delta)} = -\sigma\sqrt{\Delta}\right) = \frac{1}{2}\,, \quad \sigma > 0.$$

აქციის $S_t^{(\Delta)}$ ფასები აღიწერება $H_k = h_1 + \cdots + h_k$ სიდიდეებით, სადაც

$$h_k = \ln\frac{S_k^{(\Delta)}}{S_{k-1}^{(\Delta)}}\,, \quad k = 1,2,\ldots \tag{1.9}$$

როცა $\Delta \to 0$, მაშინ ვღებულობთ აქციის ფასის ევოლუციას უწყვეტ დროში

$$S_t = S_0 + \sigma W_t\,, \quad t \geq 0 \tag{1.10}$$

სადაც $W = (W_t)_{t\geq 0}$ ვინერის პროცესი (ბროუნის მოძრაობა), ბლეკმა და შოულსმა შემდეგი აქციის ფასების ევოლუციის აღწერისთვის გამოიყენეს ე.წ. გეომეტრიული ანუ ეკონომიკური ბროუნის მოძრაობა

$$S_t = S_0 exp\left\{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right\} \tag{1.11}$$

ევროპული და ამერიკული ტიპის ოფციონების ფასდადების ამოცანა

წარმოებულ ფასიან ქაღალდებს შორის მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს ოფციონებს (ოფციონურ კონტრაქტებს), რომელიც ფინანსური ინჟინერიის ინსტრუმენტს წარმოადგენს.

განვიხილოთ ფინანსური $(B\,, S)$- ბაზრის ბინომური (1.1), (1.2) მოდელი. მაგალითისთვის, ვთქვათ, გვაქვს ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი

$$f_N = f(S_N) = max(S_N - K, 0) \tag{1.12}$$

გადახდის ფუნქციით. ამ ოფციონის მფლობელს უფლება აქვს იყიდოს აქცია ოფციონის გამომშვებისგან (ემიტენტისგან) მხოლოდ დროის ბოლო N მომენტში, წინასწარ შეთანხმებულ K ფასად. თუ $S_N > K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი იყიდის აქციას K ფასად, მყისვე გაყიდის მას S_N ფასად და მიიღებს $f_N = S_N - K - C_N$ მოგებას, სადაც C_N ოფციონის ფასია.

ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანები (ემიტენტის ამოცანები) შემდეგია:ოფციონის სამართლიანი (გასაყიდი) ფასის დადგენა, ანუ იმ მინიმალური C_N თანხის პოვნა, რომლითაც ემიტენტი შეძლებს ააგოს მინიმალური $\pi^* = \pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ ჰეჯი და საჭიროების შემთხვევაში გადაიხადოს f_N თანხა.

მინიმალური π_n^* ჰეჯის აგება ანუ β_n^* და γ_n^* კომპონენტების პოვნა.

მინიმალური π_n^* ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის პროცესის ევოლუციის განსაზღვრა

$$X_n^{\pi^*} = \beta_n^* B_n + \lambda_n^* S_n$$

ევროპული ოფციონისგან განსხვავებით, ამერიკული ოფციონის მფლობელს მისი განაღდება შეუძლია დროის ნებისმიერ (შემთხვევით) მომენტში, $n = 0,1,\dots,N$. ამიტომ ევროპული ოფციონის ფასდადების სამ ამოცანასთან ერთად ამერიკული ოფციონის ფასდადების ამოცანაში აგრეთვე საჭიროა ოფციონის განაღდების, გარკვეული აზრით, ოპტიმალური დროის მომენტის არჩევა. განვიხილოთ ფინანსური $(B\,,S)$- ბაზრის ბინომური (1.1), (1.2) მოდელი და გადახდის ფუნქციათა

$$
\begin{aligned}
&f_0 = f_0(S_0),\\
&f_1 = f_1(S_0,S_1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_n = f_n(S_0,S_1,\dots S_n), \qquad (1.13)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_N = f_N(S_0,S_1 \dots S_N),
\end{aligned}
$$

მიმდევრობა, მაგალითისთვის, ვთქვათ, გვაქვს ამერიკული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი

$$f_n = max(S_n - K, 0) \qquad (1.14)$$

გადახდის ფუნქციით. ამ ოფციონის მფლობელს უფლება აქვს იყიდოს აქცია ემიტენტისგან დროის ნებისმიერ τ შემთხვევით მომენტში, $\tau = 0,1,\dots N$. თუ $S_n > K$, მაშინ ოფციონის მფლობელი მყისვე გაყიდის აქციას S_n ფასად და მიიღებს $f_N = S_n - K - {C_N}^A$ მოგებას, სადაც ${C_N}^A$ ამერიკული ოფციონის ფასია, რომელიც განისაზღვრება

$${C_N}^A = \sup_{\tau} E^*(1+r)^{-\tau} \cdot f_\tau \qquad (1.15)$$

ტოლობით, სადაც E^* არის $p^* = \frac{r-a}{b-a}$ ალბათური ზომით გასაშუალება, ხოლო სუპრემუმი აიღება $\tau \le N$ გაჩერების მომენტით. (1.15) სუპრემუმი მიიღწევა ე.წ. რაციონალურ τ^* მომენტში და განისაზღვრება

$$\tau^* = min\{n: f_n(S_n) \geq C_n^A\} \quad (1.16)$$

ტოლობით, სადაც C_n^A ამერიკული ოფციონის მიმდინარე ფასია დროის n მომენტში. ამერიკული ოფციონის მფლობელი, დროის τ^* მომენტში, განაღდებით მიიღებს მაქსიმალურ საშუალო მოგებას.

§ 2 ფინანსური ნაკადები

ფინანსურ ოპერაციებში ყველაზე უფრო მნიშვნელოვანი ცვლადი სიდიდეებია ფული და დრო. სწორედ ეს ორი ცვლადი შეადგენს დეტერმინისტული ფუნანსური მოდელების ძირითად ელემენტებს. ფულს დროითი ღირებულება აქვს: ფულის ერთ და იმავე რაოდენობას დროის სხვა და სხვა მომენტში სხვა და სხვა ღირებულება აქვს. დრო გადაიზომება აბცისთა T ღერძზე, ხოლო ფული- ორდინატთა M ღერძზე, რაც საშუალებას იძლევა დროსა და ფინანსური ოპერაციის შესაბამის თანხას შორის დამოკიდებულება გამოვსახოთ გრაფიკულად ან სხვა და სხვა სქემის სახით.

განასხვავებენ ფინანსური სიდიდეების ორ კლასს: პირველ კლასს შეადგენს ე.წ. მყისიერი სიდიდეები, რომლის მნიშვნელობები იცვლება დროის მომენტებში (მაგალითად, ფასი, კურსი), ხოლო მეორე კლასს- ე.წ. ინტერვალური სიდიდეები, რომლის მნიშვნელობები იცვლება დროით ინტერვალებში (მაგალითად, საპროცენტო განაკვეთი, მოგება, დივიდენდი).

აღვნიშნოთ დროის t მომენტში რაიმე აქტივის, მაგალითად, აქციის, ღი-რებულება ან ფინანსური ოპერაციის შესაბამისი თანხის რაოდენობა C_t სიმბოლოთი. (t, C_t) წყვილს მყისიერი ფინანსური ხდომილობა ან პირველი რი- გის ხდომილობა ეწოდება. ვთქვათ, გვაქვს დროის მომენტები $t_0, t_1, \dots t_n$ და ამ მომენტებში შეტანილი (გატანილი) თანხის მნიშვნელობებია $C_{t_0}, C_{t_1}, \dots C_{t_n}$ ხშირად (t_k, C_{t_k}) ხდომილობებისთვის გამოვიყენებთ ჩაწერას (t_k, C_k) $k = 0,1, \dots, n$ პირველი რიგის ხდომილობების მიმდევრობას

$$CF = \{(t_0, C_0), (t_1, C_1), \dots (t_n, C_n)\} \quad (2.1)$$

ეწოდება პირველი რიგის ფინანსური ან ფულადი ნაკადი. ამასთან C_k $k = 0,1, \dots, n$ შეიძლება იყოს შეტანილი ან გაცემული თანხა. პირველ შემთხვევაში C_k ჩაიწერება დადებითი, ხოლო მეორე შემთხვევაში -უარყოფითი რიცხვებით. მაგალითად, თუ დროის ერთეულია თვე და $t_0 = 0$ მომენტში შეტანილი იყო საწყისი თანხა 10000, შემდეგ პირველი

და მეორე თვის ბოლოს გატანილი იყო, შესაბამისად, 500 და 300, ხოლო მესამე თვის ბოლოს შეტანილი იყო 400, მაშინ გვექნება ფინანსური ნაკადი

$$CF = \{(0,10000),(1,-500),(2,-300),(3,400)\}.$$

ინტერვალური ფინანსური ხდომილობა დაკავშირებულია ინტერვალურ ფინანსურ სიდიდესთან და განიმარტება შემდეგნაირად. ვთქვათ, J არის რაიმე დროითი ინტერვალი (შუალედი), მაგალითად, $[t_1,t_2)$ $ან$ $(t_1,t_2]$ ხოლო C იყოს ამ დროითი ინტერვალის პერიოდში შეტანილი ან გაცემული თანხის რაოდენობა. (J,C) წყვილს ინტერვალური ხდომილობა ან მეორე რიგის ხდომილობა ეწოდება. შევნიშნავთ, რომ პრაქტიკაში, ძირითადად, გამოიყენება პირველი რიგის ხდომილობები. ამ მიზნით ხდება (J,C) ინტერვალური ხდომილობის გარდაქმნა (τ,C) მყისიერ ხდომილობად. ამ ოპერაციას აქტუალიზაცია ეწოდება. თუ $J = [t_1\ ,t_2]$ და ფინანსური ოპერაცია ხდება $\tau = t_1$ ან $\tau = t_2$ მომენტში, მაშინ ასეთი აქტუალიზაციის სქემას, შესაბამისად, ავანსირება და ფინალიზაცია ეწოდება.

ცხადია, შეიძლება პირველი რიგის ხდომილობების საშუალებით მეორე რიგის ხდომილობების განხილვა. მაგალითად, თუ გვაქვს პირველი რიგის ორი ხდომილობა $(t_1,C_1),(t_2,C_2)$ მაშინ შეიძლება განვიხილოთ მეორე რი- გის ხდომილობა (J,C) სადაც $J = [t_1\ ,t_2]$ და $C = C_{t_2}$ -C_{t_1} .

შემოვიტანოთ ახლა პირველი რიგის ფინანსური ნაკადის რიცხვზე გამრავლების ოპერაცია. CF=(t_k,C_k) $k = 0,1,\dots,n$ ნაკადის α რიცხვზენამრავლი არის ნაკადი, რომელიც აღინიშნება და განიმარტება ტოლობით

$$\alpha CF = \{(t_1\ \alpha C_1),\dots\ (t_n\ \alpha C_n)\}, \tag{2.2}$$

ვთქვათ, გვაქვს ორი ნაკადი

$$CF_1 = \left\{\left(t_i^{(1)},C_i^{(1)}\right)\right\}\ , \qquad i = 1,\dots m \tag{2.3}$$

$$CF_2 = \left\{\left(t_k^{(2)},C_k^{(2)}\right)\right\}\ , \qquad \text{k= 1, … n} \tag{2.4}$$

ამ ორი ნაკადის ჯამი აღინიშნება $CF_1 +\ \ CF_2$ სიმბოლოთი და განიმარტება შემდეგნაირად $\left(t_i^{(1)},C_i^{(1)}\right)$ და $\left(t_k^{(2)},C_k^{(2)}\right)$ ხდომილობებისგან, რომლისთვისაც $t_i^{(1)} \neq t_k^{(2)}$ და$\left(t_{j,}C_j^{(1)} + C_k^{(2)}\right)$

ხდომილობებისგან, რომლისთვისაც $t_i^{(1)} = t_k^{(2)} = t_i$. თუ $C_i^{(1)} + C_i^{(2)}$=0 მაშინ ჯამში $(t_i,0)$ ხდომილობის ჩაწერა არ ხდება.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.1. განვიხილოთ ორი ნაკადი

$$CF_1 = \{(0,100),(2,-200),(3,400),(5,100),(6,-300)\},$$

$$CF_2 = \{(2,400),(4,700),(5,-150),(6,650),(7,800)\},$$

იპოვეთ $2\,CF_1 + CF_2$ ნაკადი.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გამოვთვალოთ $2\,CF_1$ ნაკადი, გვაქვს

$$CF_1 = \{(0,200),(2,-400),(3,800),(5,200),(6,-600)\}.$$

შემდეგ გვაქვს $2\,CF_1 + CF_2 = \{(0,200),(3,800),(4,700),(5,50),(6,50),(7,800)\}$.

შევნიშნავთ, რომ რადგან $t = 2$ მომენტში $2\,C_2^{(1)} + C_2^{(2)} = 400 - 400 = 0$, ამიტომ ხდომილობა (2,0) არ შედის $2\,CF_1 + CF_2$ ჯამში განმარტების თანახმად.

ფინანსური ნაკადი $CF = \{(t_k,C_k)\}$ $\mathrm{k} = 1,\dots\mathrm{n}$ ხშირად ჩაიწერება არა როგორც მიმდევრობა, არამედ როგორც დროის გარკვეული ფუნქცია CF ნაკადის ფულადი ანუ გადახდის ფუნქცია განიმარტება ტოლობით

$$\mathrm{C(t)}=\begin{cases} 0 & \text{თუ } t \neq t_k \\ C_k & \text{თუ } t = t_k \end{cases} \tag{2.5}$$

ვთქვათ, $CF = \{(t_k,C_k)\}$ $\mathrm{k} = 1,\dots\mathrm{n}$ ნაკადის გადახდის ფუნქციაა C(t). აღვნიშნოთ $\tilde{C}(t)$-ით λ რიცხვის CF ნაკადზე ნამრავლის ანუ $\lambda\,CF$ ნაკადის გადახდის ფუნქცია. სამართლიანია ტოლობა

$$\tilde{C}(t) = \lambda\,\mathrm{C(t)} \tag{2.6}$$

ვთქვათ, ახლა $C_1(t)$ და $C_2(t)$ არის (2.3) და (2.4) ტოლობებით მოცემული CF_1 და CF_2 ნაკადების გადახდის ფუქციები, ხოლო, შესაბამისად, C(t) არის $CF = CF_1 + CF_2$ ჯამის გადახდის ფუნქცია. ადვილი შესამოწმებელია, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\mathrm{C(t)} = C_1(t) + C_2(t) \tag{2.7}$$

მეორე რიგის ან ინტერვალური ფინანსური ნაკადი ეწოდება მეორე რიგისხდომილობების მიმდევრობას

$$\overline{CF} = \{(J_1,C_1),\dots\ (J_n,C_n)\} \tag{2.8}$$

სადაც, $J_i = [t_{i-1}, t_i)$ $i = 1, \dots n$, წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი დროითი ინტერვალებია, $J_i \cap J_k = \emptyset$ $i \neq k,$ $i, k = 1, \dots n$. მეორე რიგის ხდომილობებისათვის აქტუალიზაციის ოპერაციის ანალოგიურად შეიძლება მეორე რიგის ნაკადის აქტუალიზაცია. მართლაც, მეორე რიგის (2.8) ნაკადის ყოველი ხდომილობის აქტუალიზაციით მივიღებთ შესაბამის პირველი რიგის ნაკადს. ამასთან, ავანსირებული და ფინალიზირებული პირველი რიგის ნაკადები აღინიშნება და ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$Adv(CF) = CF^a = \{(t_0, C_1), \dots (t_{n-1}, C_n)\} \tag{2.9}$$

$$Fin(CF) = CF^f = \{(t_1, C_1), \dots (t_n, C_n)\} \tag{2.10}$$

შესაბამისად.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.2. განვიხილოთ მეორე რიგის ნაკადი

$\overline{CF} = \{(J_1, C_1), (J_2, C_2), (J_3, C_3)\}$

სადაც $J_1 = [0,1)$ $J_2 = [1,2)$ $J_3 = [2,3)$ $C_1 = 100$ $C_2 = 200$ $C_3 = 300$ იპოვეთ ავანსირებული CF^a და ფინალიზირებული CF^f ნაკადები.

ა მ ო ხ ს ნ ა. . თუ გამოვიყენებთ ავანსირების და ფინალიზაციის ოპე რაციების განმარტებებს, მაშინ გვექნება

$$CF^a = \{(0,100), (1,200), (2,300)\}$$

$$CF^f = \{(1,100), (2,200), (3,300)\}$$

შეიძლება აგრეთვე განვიხილოთ პირველი რიგის ნაკადის მეორე რიგის ნაკადად გარდაქმნის ოპერაცია. თუ გვაქვს, მაგალითად, (2.2) ნაკადი, მაშინ ის შეიძლება ჩავწეროთ (2.8) ნაკადის სახით. მაგალითად, თუ გვაქვს ნაკადი

$$CF = \{(t_1, C_1), (t_2, C_2), (t_3, C_3), (t_4, C_4)\},$$

მაშინ,

$\overline{CF} = \{(J_1, B_1), (J_2, B_2)\},$

სადაც, $J_1 = [t_1, t_2]$, $J_2 = [t_3, t_4]$, $B_1 = C_2 - C_1$, $B_2 = C_4 - C_3$.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.3. განვიხილოთ პირველი რიგის ნაკადი

$$CF = \{(0,100),(2,200),(3,400),(5,700)\}.$$

ჩაწერეთ ამ მონაცემებით მეორე რიგის ნაკადი.

ა მ ო ხ ს ნ ა . განვიხილოთ არაგადამკვეთი ინტერვალები $J_1 = [0,2]$, $J_2 = [3,5]$ და სიდიდეები $B_1 = 200 - 100 = 100$ $B_2 = 700 - 400 = 300$

CF ნაკადის შესაბამისი მეორე რიგის ნაკადი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$\overline{CF} = \{([0,2],100),([3,5],300)\}$.

ფინანსური ნაკადების გამოყენების საილუსტრაციოდ მოკლედ შევეხებით სპეციალურ ინტერვალურ ნაკადს, რომელსაც რენტა ეწოდება.

განვიხილოთ ე. წ. გადახდების რეგულარული ნაკადები, რომელიც ბუნებ რივად წარმოიშობა უამრავ ფინანსურ ოპერაციასა და გარიგებაში. ასეთებია, მაგალითად, ობლიგაციაზე და ანაბარზე საპროცენტო სარგებლის დარიცხვა,დივიდენდების გადახდა, პენსიის გადახდა და სხვა. აქ საჭიროა დროითი და ფინანსური ასპექტის განხილვა. სწორედ დროითი ასპექტია დაკავშირებული რეგულარობასთან. მაგალითად, გადახდები წარმოებს რეგულარულად ყოველი თვის, კვარტლის ან წლის ბოლოს. ფინანსური ასპექტი დაკავშირებულია უშუალოდ გადახდების სტრუქტურასთან და რაოდენობასთან. მაგალითად, გადახდები ერთნაირია, იზრდება ან კლებულობს ერთი და იმავე სიდიდით. რენტა არის მეორე რიგის რეგულარული ფინანსური ნაკადი

$$\overline{CF} = \{(J_1,C_1),\dots,(J_n,C_n),\dots\}, \tag{2.11}$$

სადაც იგულისხმება, რომ $J_1,\dots,J_n,\dots$ ინტერვალების (რენტის პერიოდების) სიგრძეები ერთმანეთის ტოლია

$$|J_1| = \dots = |J_n| = \dots = h \tag{2.12}$$

h რიცხვს რენტის პერიოდი ეწოდება, ხოლო $J_k = (t_{k-1},t_k)$ ინტერვალების ბოლოებს ანუ t_k, $k = 0,1,\dots$ დროის მომენტებს რენტის კრიტიკული მომენტები ეწოდება. ეს მომენტები ქმნის არითმეტიკულ პროგრესიას, რომლის პირველი წევრია t_0 რენტის დასაწყისი, ხოლო სხვაობა h-ის ტოლია. ამრიგად, გვაქვს $t_k = t_0 + kh$ $k = 0,1,\dots$ რენტას ეწოდება ვადიანი, თუ J_k ინტერვალების რაოდენობა სასრულია, $k = 0,1,\dots n$ წინააღმდეგ შემთხვევაში კი-უვადო. ბოლო $J_n = (t_{n-1},t_n)$) ინტერვალის t_n მომენტს

ვადიანი რენტის ბოლო ეწოდება, ხოლო $T = t_n - t_0$ რიცხვს რენტის ჰორიზონტი (სიგანე) ეწოდება.

რენტის ზოგიერთი გადასახადი შეიძლება ნულის ტოლი იყოს. J_k ინტერვალს ეწოდება გადამხდელი პერიოდი, თუ მას შეესაბამება არანულოვანი C_k გადახდა, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი-ნულოვანი (ცარიელი). გადამხდელი პერიოდების რაოდენობას რენტის ვადა ეწოდება. პირველი გადამხდელი პერიოდის დასაწყისს რენტის ეფექტური დასაწყისი, ხოლო ბოლო გადამხდელი პერიოდის ბოლოს რენტის ეფექტური დასასრული ეწოდება. თუ რენტის დასაწყისი და ეფექტური დასაწყისი ერთმანეთს ემთხვევა-რენტას მყისიერი, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი-გადავადებული ეწოდება. თუ რენტის ბოლო და ეფექტური დასასრული ერთმანეთს ემთხვევა რენტას დასრულებული, წინააღმდეგ შემთხვევაში კი-არადასრულებული ეწოდება. თუ პერიოდი ერთი წლის ტოლია, რენტას ანუიტეტი ეწოდება. თუ რენტის ყველა გადასახადი ერთმანეთის ტოლია $C_1 = \cdots = C_n$ რენტას მუდმივი ეწოდება, ხოლო თუ გადასახადები მონოტონურად იზრდება ან კლებულობს, რენტას მონოტონური ეწოდება.

პრაქტიკაში ხდება რენტის აქტუალიზაცია პირველი რიგის ნაკადად. ასეთ შემთხვევაში ავანსირებული პირველი რიგის ნაკადს ავანსირებული, წინმსწრები ანუ პრენუმერანდო რენტა ეწოდება, ხოლო ფინალიზებულ პირველი რიგის ნაკადს-ფინალური, ჩვეულებრივი ანუ პოსტნუმერანდო რენტა ეწოდება.

ხშირად რენტის თითოეული პერიოდი (ან რომელიმე პერიოდი) იყოფა p ნაწილად და ყოველ ნაწილში გაიცემა ერთმანეთის ტოლი გადახდები. ასეთი სახის რენტებს p-ჯერადი ეწოდება. ასეთია, მაგალითად, აქციაზე რენტა, როდესაც წლიური დივიდენდის გადახდა წარმოებს კვარტალურად $(p = 4)$ ან კიდევ კუპონური რენტა ობლიგაციაზე, როდესაც წლიური კუპონური გადახდები გაიცემა ყოველი ნახევარი წლის პერიოდით და სხვა. თუ,მაგალითად, გვაქვს p-ჯერადი ერთწლიანი რენტა (p-ჯერადი ანუიტეტი) C-ს ტოლი წლიური გადახდით, მაშინ ხდება C/p სიდიდის p -ჯერ გადახდა. შევნიშნავთ, რომ ასეთი გადახდები (გადახდების ნაკადები) თვითონ წარმოადგენს რენტას, რომელსაც მიკრორენტა ეწოდება.

$\overline{CF}$ რენტის p--ჯერადი დანაწილების ოპერაცია $D^{(p)}$-თი აღინიშნება, ხოლო ამ ოპერაციით მიღებული შესაბამისი რენტა აღინიშნება $D^{(p)}\ \overline{CF}$ სიმბოლოთი.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.4. განვიხილოთ რენტა

$\overline{CF}=\{((0,1),100),((1,2),200),((2,3),300)\}$.

იპოვეთ მესამე პერიოდის შესაბამისი 3-ჯერადი მიკრორენტა;

იპოვეთ მთლიანი რენტის შესაბამისი 2-ჯერადი მიკრორენტა.

ა მ ო ხ ს ნ ა . ადვილი შესამოწმებელია,რომ საძებნ მიკრორენტებს,შესაბამისად, აქვს შემდეგი სახე

$$D^{(3)}=((2,3),300)=\left\{\left(\left(2,\frac{7}{3}\right),100\right),\left(\left(\frac{7}{3},\frac{8}{3}\right),100\right),\left(\left(\frac{8}{3},3\right),100\right)\right\}$$

$$D^{(2)}\overline{CF}=\left\{\left(\left(0,\frac{1}{2}\right),50\right),\left(\left(\frac{1}{2},1\right),50\right),\left(\left(1,\frac{3}{2}\right),100\right),\left(\left(\frac{3}{2},2\right),100\right),\left(\left(2,\frac{5}{2}\right),150\right),\left(\left(\frac{5}{2},3\right),150\right)\right\}$$

თუ $\overline{CF}$ რენტის p-ჯერადი მიკრორენტისთვის გამოვიყენებთ აქტუალიზაციის ორ ოპერაციას-ავანსირებას და ფინალიზაციას,მაშინ მივიღებთ p-ჯერად ავანსირებულ და ფინალიზირებულ მიკრორენტებს(რენტებს), რომელიც აღინიშნება $Adv\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right)$ და $Fin\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right)$ სიმბოლოებით, შესაბამისად, ადვილი შესამოწმებელია, რომ ამ სიდიდეებს გააჩნიათ შემდეგი თვისება

$$Adv\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right)=D^{(p)}(Adv(\overline{CF})) \qquad (2.13)$$

$$Fin\left(D^{(p)}(\overline{CF})\right)=D^{(p)}\left(Fin(\overline{CF})\right) \qquad (2.14)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.5. ვთქვათ, გვაქვს მაგალითი 2.4-ში განხილული რენტა

$\overline{CF}=\{((0,1),100),((1,2),200),((2,3),300)\}$.

შეამოწმეთ (2.13) თვისება 2-ჯერადი მიკრორენტისთვის.

შეამოწმეთ (2.14) თვისება 2-ჯერადი მიკრორენტისთვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გამოვთვალოთ (2.13) და (2.14) ტოლობების მარცხენა და მარჯვენა მხარეები და, შესაბამისად, შევადაროთ ისინი ერთმანეთს.

გამოვთვალოთ (2.13) ტოლობის მარცხენა მხარე. მაგალითი 2.4-ში გამოთვლილი გვაქვს მიკრორენტა $D^{(2)}\overline{CF}$ შემდეგ გვაქვს

$$Adv\left(D^{(2)}(\overline{CF})\right) = \left\{(0,50),\left(\tfrac{1}{2},50\right),(1,100),\left(\tfrac{3}{2},100\right),(2,150),\left(\tfrac{5}{2},150\right)\right\}$$

გამოვთვალოთ ახლა (2.13) ტოლობის მარჯვენა მხარე. გვაქვს

$$Adv(\overline{CF}) = \{(0,100),(1,200),(2,300)\}.$$

მივიღეთ პირველი რიგის ავანსირებული ნაკადი. მისი შესაბამისი 2-ჯერადი რენტის გამოსათვლელად საჭიროა დროის ყველა მომენტთან ერთად განვიხილოთ აგრეთვე მათგან მარჯვნივ $1/2$-ის ტოლი სიგრძით დაშორებული მომენტები და შესაბამისი გადახდები. რიცხვი $1/2$ გვაქვს იმიტომ, რომ ვიხილავთ 2-ჯერად რენტას და დასაყოფი ნაკადის მომენტებს შორის მანძილები ერთის ტოლია. გვექნება

$$D^{(2)}\left(Adv(\overline{CF})\right) = \left\{(0,50),\left(\tfrac{1}{2},50\right),(1,100),\left(\tfrac{3}{2},100\right),(2,150),\left(\tfrac{5}{2},150\right)\right\}.$$

ამრიგად, მივიღეთ

$$Adv\left(D^{(2)}(\overline{CF})\right) = D^{(2)}(Adv(\overline{CF}))$$

გამოვთვალოთ (2.14) ტოლობის მარცხენა მხარე $D^{(2)}\overline{CF}$ მიკრორენტა გამოთვლილია. შემდეგ გვაქვს

$$Fin\left(D^{(2)}(\overline{CF})\right) = \left\{\left(\frac{1}{2},50\right),(1,50),\left(\frac{3}{2},100\right),(2,100),\left(\frac{5}{2},150\right),(3,150)\right\}$$

გამოვთვალოთ ახლა (2.14) ტოლობის მარჯვენა მხარე. გვაქვს

$$Fin(\overline{CF}) = \{(1,100),(2,200),(3,300)\}.$$

მივიღეთ ისევ პირველი რიგის, მხოლოდ უკვე ფინალიზირებული ნაკადი.მისი შესაბამისი 2-ჯერადი რენტის გამოსათვლელად ამ შემთხვევაში საჭიროა დროის ყოველ მომენტთან ერთად განვიხილოთ აგრეთვე მათგან მარცხნივ $1/2$-ის ტოლის სიგრძით დაშორებული მომენტები და შესაბამისი გადახდები. ამ პროცედურის ჩატარებით ადვილად დავრწმუნდებით, რომ

$$Fin\left(D^{(2)}(\overline{CF})\right) = D^{(2)}\left(Fin(\overline{CF})\right)$$

პირველი რიგის ნაკადისათვის (2.5) გადახდის ფუნქციის ანალოგი დროითი J შუალედისათვის განიმარტება შემდეგნაირად. ნაკადის ნეტო სიდიდე ეწოდება გამოსახულებას

$NV = (CF; J) = \sum_{k:t_k \in J} C_k$ (2.15)

ანუ ნაკადის ნეტო სიდიდე არის ჯამი ნაკადის იმ C_k სიდიდეებისა, რომლისთვისაც დროითი t_k მომენტები ეკუთვნის დროით J ინტერვალს. შევნიშნავთ, ამასთან, რომ (2.15) რიცხვითი მნიშვნელობები დამოკიდებულია J ინტერვალის ბოლო წერტილების ინტერვალისათვის მიკუთვნებაზე.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.6. განვიხილოთ ნაკადი

$CF = \{(0,300), (1,100), (2,-200), (3,400)\}$

იპოვეთ $NV = \big(CF; [0,2)\big)$ და $NV = (CF; (0,3])$ ნეტო სიდიდეები

ა მ ო ხ ს ნ ა . (2.11) ფორმულის თანახმად გვაქვს

$NV = \big(CF; [0,2)\big) = 300 + 100 = 400$

$NV = (CF; (0,3]) = 100 + (-200) + 400 = 300$

ნეტო სიდიდეს გააჩნია შემდეგი თვისება: ნებისმიერი $t_1 < t_2 < t_3$ დროის მომენტებისათვის სამართლიანია ტოლობა

$NV(CF; [t_1, t_3]) = NV(CF; [t_1, t_2]) + NV(CF; [t_2, t_3])$ (2.16)

როდესაც ხდება ინვესტორის მიერ თანხის დაგროვება, ე. ი. გვაქვს დაგროვების ანგარიში ანუ ფონდი, მაშინ ფონდის სიდიდე დროის t მომენტში შეიძლება ჩავწეროთ ნეტო სიდიდის საშუალებით. მართლაც, ვთქვათ, დროის საწყის t_0 მომენტში ფონდის სიდიდეა V_0, ხოლო დროის $t > t_0$ მომენტში-V_t ფონდთან დაკავშირებული CF ნაკადისათვის V_t სიდიდე დროის t მო-მენტის ჩათვლით მოიცემა შემდეგი სახით

$V_t = V_0 + NV(CF, (t_0, t])$ (2.17)

რომელსაც ბალანსის განტოლება ეწოდება. თუ გვაქვს დროის ნებისმიერი სამი მომენტი $t_0 < t_1 < t_2$ მაშინ (2.17) განტოლებიდან ადვილად მივიღებთ შემდეგ ტოლობას

$V_{t_2} = V_{t_1} + NV(CF, (t_1, t_2])$ (2.18)

რომელსაც აგრეთვე ბალანსის განტოლება ეწოდება. მართლაც, გვაქვს

$V_{t_2} = V_0 + NV(CF, (t_0, t_2]) = V_0 + NV(CF, (t_0, t_1]) + NV(CF, (t_1, t_2]) =$

$V_{t_1} + NV(CF, (t_1, t_2]).$

ამრიგად, ნეტო სიდიდე გვაძლევს დროის $(t_1,t_2]$ შუალედში ფონდში შესული და ფონდიდან გასული თანხების საერთო ბალანსს, ანუ დროის მოცემულ შუალედში ფონდის სიდიდის ცვლილებას

$$V_{t_2} - V_{t_1} = NV(CF,(t_1,t_2]). \qquad (2.19)$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.7. განვიხილოთ ნაკადი

$CF = \{(1,100),(2,-200),(3,400)\}$

და ვთქვათ, დროის t_0=0 მომენტში ფონდის სიდიდეა $V_0 = 500$.

გამოთვალეთ V_1 V_2 და V_3 სიდიდეები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . გვაქვს

$V_1 = V_0 + NV(CF,(0,1]) = 500 + 100 = 600$

$V_2 = V_0 + NV(CF,(0,2]) = 500 + 100 - 200 = 400$

$V_3 = V_0 + NV(CF,(0,3]) = 500 + 100 - 200 + 400 = 800$

ცხადია, V_2 და V_3 სიდიდეები შეიძლება ასეც დავთვალოთ

$V_2 = V_1 + NV(CF,(1,2]) = 600 - 200 = 400$

$V_3 = V_2 + NV(CF,(2,3]) = 400 + 400 = 800$

ფინანსური ნაკადები გამოიყენება სხვადასხვა სახის ფინანსური ოპე- რაციების ანალიზში, მაგალითად, ფინანსურ გარიგებაში, რომელიც მდგო- მარეობს რაიმე საქონლის ან ფინანსური აქტივის ყიდვა-გაყიდვაში.

ვთქვათ, დროის t_1 მომენტში ვიყიდეთ რაიმე აქტივი p_1ფასად, ხოლო დროის $t_2 > t_1$ მომენტში გავყიდეთ იგი p_2 ფასად. ამრიგად, გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$$CF = \{(t_1,-p_1),(t_2,p_2)\} \qquad (2.20)$$

რომელსაც წარმოქმნილი ნაკადი ეწოდება. გარიგების პერიოდში მყიდველმა შეიძლება მიიღო მიმდინარე შემოსავალი. ასე მაგალითად, აქციის მფლობელმა შეიძლება მიიღოს გარკვეული დივიდენდი, ხოლო ობლიგაციის მფლობელმა მიიღოს საპროცენტო (საკუპონო) შემოსავალი.შევნიშნავთ, რომ მიმდინარე შემოსავალი შეიძლება მიიღოს აგრეთვე რაიმე ქონების მყიდველმაც, მაგალითად, არენდის გადასახადის სახით.

ვთქვათ, $J = [t_1,t_2]$ პერიოდში მიმდინარე შემოსავალი არის D_J. მაშინ ფინანსური გარიგება შეიძლება აღვწეროთ ნაკადის წყვილით: პირველი რიგის ნაკადით

$$CF_1 = \{(t_1,-p_1),(t_2,p_2)\} \tag{2.21}$$

და მეორე რიგის ნაკადით

$$\overline{CF_2} = \{(J, D_J)\} \tag{2.22}$$

ჯამური ანუ სრული მიმდინარე შემოსავალი იქნება

$$I_J = D_J + P_J \tag{2.23}$$

სადაც

$P_J = P_2 - P_1$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.8. ვთქვათ, $J = [t_1,t_2]$ პერიოდი აერთი წელი. წლის დასაწყისში (t_1 მომენტში) ვიყიდეთ აქცია $p_1 = 100$ ფასად, რომელიც გავყიდეთ წლის ბოლოს (t_2 მომენტში) $p_2 = 140$ ფასად. ამასთან ერთად, J პერიოდში მივიღეთ დივიდენდი $D_J = 10$. იპოვეთ სრული მიმდინარე შემოსავალი და ფინანსური გადიგების შესაბამისი პირველი და მეორე ნაკადები.

ა მ ო ხ ს ნ ა . (2.22) ტოლობის თანახმად გვაქვს

$$I_J = 10 + (140 - 100) = 50$$

(2.21) და (2.22) ტოლობების თანახმად გვაქვს

$$CF_1 = \{(t_1,-100),(t_2,140)\}$$

$$\overline{CF_2} = \{([t_1,t_2],10)\}$$

შევნიშნავთ, რომ მიმდინარე შემოსავლის გადახდა ხდება, როგორც წესი $J = [t_0,t_1]$ პერიოდის ბოლოს t_1 მომენტში ან სერიული გადახდები. მაგალითად, დივიდენდები აქციაზე შეიძლება გადავიხადოთ ერთხელ წლის ბოლოს ან ყოველი კვარტლის ბოლოს. მიმდინარე შემოსავლის ერთჯერ გადახდა პერიოდის ბოლოს ფაქტობრივად წარმოადგენს $\overline{CF_2}$ ნაკადის ფინალიზაციას და გვაქვს

$$CF_2 = Fin(\overline{CF_2}) = \{(t_2, D_J)\}, \tag{2.24}$$

რომელიც მხოლოდ ერთი (t_2, D_J) ფინანსური ხდომილობისგან შედგება. ეს ხდომილობა წარმოადგენს დროის t_2 მომენტში D_J მიმდინარე შემო- სავლის გადახდას. ამრიგად, ჩვენ საშუალება გვაქვს ფინანსური გარიგება განსხვავებული რიგის (2.21) და (2.22) ნაკადების მაგივრად აღვწეროთ ერთი პირველი რიგის ნაკადის საშუალებით.

$$\mathrm{CF}=CF_1+CF_2 \tag{2.25}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.9. ვთქვათ, გვაქვს მაგალითი 2.8-ის მონაცემები.ჩაწერეთ (2.25) ტოლობა ფინანსური გარიგებისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა . პირველ რიგში ჩავწეროთ $\overline{CF_2}$ ნაკადის შესაბამისი ფინალიზირებული ნაკადი. გვექნება

$$CF_2 = \{(t_2, 10)\}$$

ახლა თუ გავიხსენებთ პირველი რიგის ორი ნაკადის ჯამის სტრუქტურას, მაშინ გვექნება

$\mathrm{CF}=CF_1+CF_2=\{(t_1,-100),(t_2,140)\}+\{(t_2,10)\}=\{(t_1,-100),(t_2,-150)\}$

ზემოთ აღწერილი ფინანსური გარიგების ანალოგიურ სიტუაციასთან გვაქვს საქმე მარტივი საკრედიტო გარიგების შემთხვევაშიც. ვთქვათ, კრედიტორმა გასცა დროის t_0 მომენტში p რაოდენობის სესხი (ძირითადი ვალი), რომელიც დებიტორმა (სესხის ამღებმა) უნდა დაფაროს დროის $t_1 > t_0$ მომენტში გარიგების პროცენტის გათვალისწინებით $[t_0,t_1]$ პერიოდში. კრედიტორის პოზიციიდან მისი მიმდინარე შემოსავალია I_J, სადაც $J = [t_0,t_1]$ ამ გარიგებისათვის გვაქვს

$$CF_1 = \{(t_0,-p),(t_1,p)\}$$

$$\overline{CF_2} = \{(J,I_J)\}$$

დებიტორის მიერ პროცენტის გადახდა ხდება ან გარიგების დასაწყისში(t_0 მომენტში) ან გარიგების ბოლოს (t_1 მომენტში). პირველ შემთხვევაში გვაქვს

$$CF_2 = Fin(\overline{CF_2}) = \{(t_1,I_J)\}$$

და გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

$\mathrm{CF}=CF_1+CF_2=\{(t_0,-p),(t_1,p+I_J)\}$

მეორე შემთხვევაში გვაქვს

$CF_2 = Adv(\overline{CF_2}) = \{(t_0, I_J)\}$

და გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადია

CF=CF_1+CF_2=$\{(t_0, -p + I_J), (t_1, p)\}$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 2.10. ვთქვათ, კრედიტორმა $t_0 = 0$ მომენტში გასცა სესხი $p = 1000$ ერთი წლის ვადით, რომელიც დებიტორმა უნდა დააბრუნოს $t_1 = 1$ მომენტში წლის ბოლოს სესხის 10%-ის გათვალისწინებით. ჩაწერეთ გარიგების შესაბამისი პირველი რიგის ნაკადები ფინალიზაციისა და ავანსირების შემთხვევებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა . პირველ რიგში გამოვთვალოთ მიმდინარე შემოსავალი. გვაქვს $I_J = 100$, $J = [0, 1]$. შემდეგ გვაქვს

$$CF_1 = \{(0, -1000), (1, 1000)\}$$

$$\overline{CF_2} = \{([0,1], 100)\}$$

ფინალიზაციის შემთხვევაში გვექნება

$$CF_2 = Fin(\overline{CF_2}) = \{(1, 100)\}$$

CF=CF_1+CF_2=$\{(0, -1000), (1, 1000)\} + \{(1, 100)\} = \{(0, -1000), (1, 1100)\}$

ავანსირების შემთხვევაში გვექნება

$CF_2 = Adv(\overline{CF_2}) = \{(0, 100)\}$

CF=CF_1+CF_2=$\{(0, -1000), (1, 1000)\} + \{(0, 100)\} = \{(0, -900), (1, 1000)\}$

§ 3 ფინანსური ოპერაციები და სქემები

განვიხილოთ მარტივი საკრედიტო გარიგება P_0 საწყისი თანხით დრო-ის t_0 მომენტში და P_1 თანხით დაფარვის t_1 მომენტში. ეს ოპერაცია წარ- მოადგენს დისკრეტულ ნაკადს

$$CF = \{(t_0, B_0), (t_1, B_1)\} \qquad (3.1)$$

სადაც $B_0 = P_0$ და $B_1 = P_1$. აქ არაფერია ნათქვამი საკრედიტო გარიგე- ბის მდგომარეობის შესახებ დროის იმ მომენტებისათვის, რომელიც (t_0, t_1) შუალედში მდებარეობს. თუ, მაგალითად, ხდება პროცენტის დარიცხვა ამ შუალედის ნებისმიერ t მომენტში, $t_0 \leq t \leq t_1$, მაშინ გვაქვს ე. წ. დაგროვებული (დარიცხული) პროცენტის შესაბამისი თანხა I_t და დროის t მომენტისათვის, გარიგების მდგომარეობა შეიძლება ასე ჩავწეროთ

$$B_t = B(t) = I_t \tag{3.2}$$

ცხადია, თუ $t = t_0$, მაშინ $I_{t_0} = 0$ და $B(t_0) = B_0$. თუ $t = t_1$, მაშინგვექნება

$$B_{t_1} = B(t) = B_0 + I_{t_1} = B_1 \tag{3.3}$$

(3.2), (3.3) ტოლობებში მთავარია შევნიშნოთ, რომ საკრედიტო გარიგების შესაბამისი ფინანსური პროცესი B_t დამოკიდებულია მხოლოდ დროზე და ფიქსირებულ პარამეტრებზე t_0-ზე და B_0-ზე. სხვანაირად რომ ვთქვათ, ფინანსურ პროცესზე შემთხვევითი ფაქტორების გავლენას გამოვრიცხავთ (არ ვითვალისწინებთ), ანუ ვიხილავთ დეტერმინისტულ ფინანსურ პროცე- სებს. ასეთი პროცესის დინამიკა (საწყისი B_0 თანხის ევოლუცია დროში) შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი განტოლების სახით

$$B_t = B(t_0; t, B_0) \tag{3.4}$$

შევნიშნოთ, რომ ხშირად $(t,\ C)$ ფინანსურ ხდომილობას აღნიშნავენ C_t სიმბოლოთი, რომელსაც კიდევ (t მომენტში) “დათარიღებული” თანხა ეწოდება. თუ გვაქვს ხდომილობა $(\tau,\ C)$ და $t_0 = \tau$, $B_0 = C$, მაშინ გვექნება კონკრეტული (ინდივიდუალური) ფინანსური პროცესი

$$B_t = B(t_0; \tau, C)$$

ასეთ შემთხვევაში B_t-ს ეწოდება დროის t მომენტში $(\tau,\ C)$ ხდომილობის (C თანხის) მომავალი (დაყვანილი) მნიშვნელობა და აღინიშნება შემდეგნაირად

$$B_t = FV_t(\tau, C) \quad t > \tau \tag{3.5}$$

აქვე შევნიშნოთ, რომ დეტერმინისტულ ფინანსურ პროცესში მისი საწყისი მდგომარეობა მთლიანად და ცალსახად განსაზღვრავს (წარმოქმნის) მის ყველა შემდგომ მომავალ მდგომარეობას.

ვიტყვით, რომ (t_2, C_2) ხდომილობა უშუალოდ ცვლის (ენაცვლება) (t_1, C_1)ხდომილობას დეტერმინისტული პროცესის მიმართ, თუ

$C_2 = B(t_2;t_1,C_1)$ როცა $t_2 \geq t_1$

$C_1 = B(t_1;t_2,C_2)$ როცა $t_1 \geq t_2$

B_t პროცესს ეწოდება სრულად დეტერმინისტული (განსაზღვრული), თუ ნებისმიერი $(\tau,\ C)$ ხდომილობისათვის და დროის p მომენტისათვის არსებობს ერთადერთი ხდომილობა (p,V), რომელიც უშუალოდ ცვლის (τ,C) ხდომილობას. ამრიგად, სრულად დეტერმინისტული პროცესისათვის გვაქვს: თუ (p, V) ცვლის (τ, C) -ს,$p \geq \tau$, მაშინ

$V = B(p;\tau,C)$ ანუ $V = FV_p(\tau,C)$,

ხოლო, თუ (τ, C) ცვლის (p, V)-ს $\tau \geq p$ მაშინ

$C = B(\tau;p,V)$ ანუ $C = FV_\tau(p,V)$.

თუ ხდომილობა (p, V) წარმოქმნის მომავალში (τ, C) ხდომილობას, რაც$C = FV_\tau(p,V)$. ტოლობით ჩაიწერება, ანალოგიურად შეიძლება ჩავწეროთ $p < \tau$ მომენტისათვის (τ, C) ხდომილობის (ანუ C თანხის) დღევანდელი ანუ მიმდინარე მნიშვნელობა ტოლობით

$$V = V_p = PV_p(\tau,C), \qquad p < \tau \tag{3.6}$$

ამრიგად, (3.5) და (3.6) ტოლობების თანახმად გვაქვს: თუ $p \geq \tau$, მაშინ B_p=$FV_p(\tau,C)$, არის C თანხის მნიშვნელობა მომავალში დროის p მომენტში და თუ $p < \tau$, მაშინ $V_p = PV_p(\tau, C)$ არის მომავალში τ მომენტში C თანხის მნიშვნელობა დროის p მომენტში ანუ მიმდინარე (დღევანდელი p მომენტში) მნიშვნელობა. ორ (t_1, C_1) და (t_2, C_2) ხდომილობას ეწოდება ეკვივალენტური დროის p მომენტის მიმართ, თუ ისინი ცვლიან ერთ და იმავე (p, V) ხდომილობას.ამ ფაქტს $C_1 \overset{p}{\sim} C_2$ სიმბოლოთი აღნიშნავენ. ამასთან p მომენტს პოლისი ეწოდება .

ვთქვათ, გვაქვს $(t,\ C)$ ხდომილობა და p პოლისი. გამოსახულებას

$$V_p = FV_p(t,C) = A(t,p;C), \qquad p \geq t \tag{3.7}$$

ეწოდება კაპიტალიზაციის ფინანსური კანონი, რომელიც განსაზღვრავს $(t,\ C)$ ხდომილობის მომავალ მდგომარეობას. ანალოგიურად, გამოსახულებას

$$V_p = PV_p(t, C) = D(t, p; C), \quad p \leq t \tag{3.8}$$

ეწოდება დისკონტირების ფინანსური კანონი, რომელიც განსაზღვრავს (t, C) ხდომილობის მიმდინარე მდგომარეობას.

საინტერესოა შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ფაქტები:

$$(t_1, C_1) \overset{p}{\sim} (t_2, C_2) \Leftrightarrow PV_p(t_1, C_1) = PV_p(t_2, C_2),$$

$$A(p.p; C) = D(p, p; C) = C$$

ბოლო ტოლობას კიდევ ნორმირების თვისება ეწოდება .

თუ $C = 1$ მაშინ (3.7) ,(3.8) ტოლობებიდან გვექნება

$$A(p, t; C) = C \cdot A(p, t; 1) = a(t, p) \qquad p \geq t \tag{3.9}$$

$$D(p, t; C) = C \cdot D(p, t; 1) = d(t, p) \qquad p \leq t \tag{3.10}$$

შევნიშნავთ, რომ $a(t, p)$ და $d(t, p)$ ფუნქციებს ზრდის და დისკონტირების კოეფიციენტები ეწოდება, ხოლო (3.9), (3.10) ტოლობებს-C თანხის მიმართ ერთგვაროვნების თვისება, შესაბამისად.

კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების ფინანსური კანონები შეიძლება ერ- თი ზოგადი ფინანსური კანონის სახით ჩავწეროთ შემდეგნაირად

$$F(t, p; C) = \begin{cases} A(t, p; C) & \text{თუ } p \geq t \\ D(t, p; C) & \text{თუ } p \leq t \end{cases}$$

$$v(t, p) = F(t, p; 1) = \begin{cases} a(t, p) & \text{თუ } p \geq t \\ d(t, p) & \text{თუ } p \leq t \end{cases}$$

კაპიტალიზაციისა და დისკონტირების კანონები დროში ერთგვაროვანია,ანუ ნებისმიერი $T > 0$ სიდიდისათვის გვაქვს:

$$a(t + T, p + T) = a(t, p), \quad d = (t + T, p + T) = d(t, p).$$

ვთქვათ, სამართლიანია აგრეთვე შემდეგი ტოლობები:

$$a(t, p) \cdot d(p, t) = 1 \qquad t \geq p$$

$$a(t,\tau)a(\tau,p) = a(t,p) \qquad\qquad d(t,\tau)d(\tau,p) = d(t,p)$$

ასეთ შემთხვევაში პირველ ტოლობას შეუღლების თვისება ეწოდება, ხო-ლო ბოლო ორს-ტრანზიტულობის თვისება. ამასთან, თუ ტრანზიტულობის თვისება ერთდროულად სრულდება კაპიტალიზაციისა და დისკონტირებისკანონებისთვის, მაშინ

$$\upsilon(t,p) = \upsilon(t,\tau)\cdot\upsilon(\tau,p),$$

ანუ რაც იგივეა

$$PV_p(t,C) = PV_p\big(PV_\tau(t,C)\big)$$

კაპიტალიზაციის ორი კანონი $a_1(t,p)$ და $a_2(t,p)$ ეკვივალენტურია, თუ ნებისმიერი (t,C) ხდომილობისთვის დროის p მომენტში $p > t$ ისინი ერთ და იმავე ხდომილობას ცვლის. ანალოგიურად, დისკონტირების ორი კანონი $d_1(t,p)$ და $d_2(t,p)$ ეკვივალენტურია, თუ ნებისმიერი (t,C) ხდომილობის- თვის ისინი ერთ და იმავე ხდომილობას ცვლის. იმ შემთხვევაში, როცა ზოგადი ფინანსური კანონი $F(t,p;C)$ ერთგვარო- ვანია, მაშინ გვაქვს დაყვანის ოპერაციის ადიციურობის და ერთგვაროვნო-ბის შესაბამისი თვისებები p და t ფიქსირებული მომენტებისათვის

$$PV_p(t,C_1+C_2) = PV_p(t,C_1) + PV_p(t,C_2)$$

$$PV_p(t,\lambda C) = \lambda PV_p(t,C)$$

ერთგვაროვან შემთხვევაში დაყვანის PV_p ოპერაციისთვის გვექნება:

$$PV_p(t,C) = PV_p(t,C\cdot 1) = CPV_p(t,1)$$

რიცხვს $PV_p(t,1) = \upsilon(t,p)$ ეწოდება დაყვანის კოეფიციენტი ანუ დისკონ- ტირების განზოგადებული კოეფიციენტი.

განვიხილოთ რაიმე ხდომილობა (t,C_t). მოცემული p და τ დროითი მომენტებისათვის დაყვანის ფარდობითი ოპერაცია განიმარტება ტოლობით

$$PV_\tau^{(p)}(t,C_t) = C_t\cdot\frac{\upsilon(t,p)}{\upsilon(\tau,p)} \tag{3.11}$$

შევნიშნოთ, რომ, როცა $p=\tau$, მაშინ $PV_p^{(p)}= PV_p$.

ფინანსურ გარიგებებში დროის ძირითად (საბაზისო) ერთეულად განი-ხილება წელი, თვე, თვის რიცხვი, წუთი, წამი და სხვა. ამიტომ ფინანსური ხდომილობის დათარიღებას (კალენდრის შემოღებას) არსებითი მნიშვნელო-ბა აქვს. ჩვენ განვიხილავთ დათარიღების შემდეგ სამეულს:

თარიღი = $\langle$დღე, თვე, წელი $\rangle$.

ამასთან იგულისხმება, რომ თარიღის ყოველ კომპონენტს გააჩნია ცვლილების ბუნებრივი დიაპაზონი. ასე მაგალითად, დღის და თვის შესაძლო მნიშვნელობებია, შესაბამისად,სიმრავლეები$\{1;\ 2; \dots\ ;\ 31\}$,$\{1; 2; \dots 12\}$

ხოლო წელმა შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი ნატურალური რიცხვითი მნიშ-ვნელობა $\{1,2,\dots\}$ამრიგად, მაგალითად, სამეული $\langle 21,7,2005\rangle$ აღწერს თარიღს „ 2005 წლის 21 ივლისი „ ან შემოკლებით „21.07.05 „

თარიღისა და მისი კომპონენტებისათვის შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნა

$$\partial = \langle d,m,y\rangle$$

სადაც d,m და y სიმბოლოები აღნიშნავს დღეს, თვეს და წელს. შესაბამისად, წლის შუალედისათვის განიხილება ორი შემთხვევა : y წლის (წელი y ნომრით) $[\langle 1,1,y\rangle,\langle 31,12,y\rangle]$ შუალედი არის სტანდარტული კალენდარული წელი ანუ კიდევ $[\langle 1,1,y\rangle,\langle 1,1,y+1\rangle]$ შუალედი, ხოლო კალენდარული წლის შუალედის მაგალითია $[\langle 31.03.1998\rangle,\langle 31.03.1999\rangle]$ შუალედი. ამასთან, ნაკიანი წლის დროს გვაქვს 366 დღე , წინააღმდეგ შემთხვევაში 365 დღე . სტანდარტული წელი არის ნულოვანი , თუ მისი ნომერი y იყოფა ოთხზე და არ იყოფა ასზე , ან იყოფა ათასზე, ცხადია , რომ გაყოფაში იგულისხმება უნაშთო გაყოფა .

ორ თარიღს $\partial_1 = \langle d_1,m_1,y_1\rangle$, $\partial_2 = \langle d_2,m_2,y_2\rangle$ ეწოდება ერთსახელა თუ ისინი განსხვავდებიან მხოლოდ წლის ნომრით , ანუ $d_1 = d_2$, $m_1 = m_2$ და $y_1 \neq y_2$.

ვთქვათ J რაიმე კალენდარული შუალედია წლებში , განვიხილოთ ორი ერთსახელა თარიღი $\partial_1 = \langle d,m,y_1\rangle$, $\partial_2 = \langle d,m,y_2\rangle$ ე. ი. გვაქვს $|y_2 - y_1|$ სიგრძის J შუალედი . მაშინ ამ თარიღებს შორის დღეების ზუსტი რაოდენობა გამოითვლება ტოლობით

$$D(\partial_1,\partial_2) = 365\cdot|y_2 - y_1| + k, \qquad (3.12)$$

სადაც k არის J შუალედში ოთხის ჯერადი რიცხვი, ანუ ნაკიანი თარიღების რაოდენობა. მაგალითად, , თუ $\partial_1 = \langle 12.4.1980 \rangle$, $\partial_2 = \langle 12.4.2002 \rangle$ მაშინ გვექნება

$$D(\partial_1, \partial_2) = 365 \cdot 22 + 5 = 8035$$

კალენდარული დროითი შუალედის დღეების რაოდენობა გამოითვლება ე .წ. $N(\partial)$ სტანდარტული ფუნქციის საშუალებით, რომელიც წარმოადგენს ∂ თარიღის რიგით ნომერს სტანდარტულ კალენდარულ წელში. შევნიშნავთ, რომ ნაკიანი და არანაკიანი წლებისთვის შედგენილია ცხრილები, რომლის მიხედვით ყოველ ∂ თარიღს გააჩნია თავისი რიგითი ნომერი ∂. ამრიგად, თუ გვაქვს ორი თარიღი ∂_1 და ∂_2, მაშინ მათ შორის დღეების რაოდენობა დაითვლება ტოლობით

$$D(\partial_1, \partial_2) = N(\partial_2) - N(\partial_1).$$

დროითი J შუალედის ხანგრძლივობა დღეებში გამოითვლება სხვადასხვა წესის გამოყენებით. ჩვენ მოკლედ შევეხებით ზოგიერთ ძირითად წესს. მაგალითად, ზოგიერთი სტანდარტული წესი, რომელიც ერთმანეთთან აკავშირებს დროითი შუალედის ხანგრძლივობას დღეებში და წლებში, მოიცემა ფორმულით

$$T = \frac{D(J)}{Y} \tag{3.13}$$

სადაც T და D დროის ხანგრძლივობაა, შესაბამისად, წლებში და დღეებში, Y წლის გარკვეული წესით არჩეული რაოდენობაა, რომელსაც დივიზორი ეწოდება. წლიური დივიზორის ტიპური მნიშვნელობებია: Y = 360 და Y =365. თუ $D(J)$ არის J შუალედში დღეების ზუსტი რაოდენობა, მაშინ Y = 365 და Y = 360 წლიური დივიზორებისთვის (3.13) ფორმულის თანახმად გვექნება ორი სხვადასხვა წესი.

წ ე ს ი ACT/365. ამ წესის თანახმად (3.13) ტოლობისთვის გვაქვს:

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{365},$$

სადაც $D(J)$ არის J პერიოდში დღეების ზუსტი რაოდენობა. შევნიშნოთ, რომ ნაკიანი წლისთვის $D(J)$ =366, ე. ი. $T(J) > 1$, ხოლო არანაკიანი წლისთვის $D(J)$ = 365 და $T(J)$ = 1. თუ J_n არის n რაოდენობის წლების შუალედი, რომელშიც k რაოდენობის ნაკიანი წელია, მაშინ (3.13)ფორმულის თანახმად გვექნება

$$T(J_n) = n + \frac{k}{365}$$

თუ ჩავთვლით, რომ $k \approx n/4$, მაშინ ბოლო ტოლობაში აბსოლუტური ცდომილება იქნება

$$\delta = \frac{n}{4 \cdot 365} = \frac{n}{1460} \approx 0.7 \cdot 10^{-2} \cdot n$$

განვიხილოთ T-ს გამოთვლის შემდეგი

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.1. ვთქვათ J არის პერიოდი: 14.02.1996-27.08.1996, მაშინ გვექნება

$T = \frac{D(J)}{365} = \frac{195}{365} \approx 0.5243$ (წელი)

წ ე ს ი ACT/360. ამ წესს კიდევ ბანკის (საბანკო) წესი ეწოდება, რომლის თანახმად გვაქვს

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{360},$$

სადაც $D(J)$ არის J პერიოდში დღეების ზუსტი რაოდენობა. ეს წესი ნაკიანი და არანაკიანი წლებისთვის, შესაბამისად, გვაძლევს

$T = \frac{366}{360} = 1{,}0167$ (წელი)

$T = \frac{365}{360} = 1{,}0139$ (წელი)

შევნიშნავთ, რომ ზოგჯერ ხდება ნაკიანი თარიღის გამორიცხვა მუდმივი-365 დღიანი დივიზორის დროს, ზოგჯერ კი ხდება დივიზორის მნიშვნელობად 366 დღის განხილვა. პირველი შემთხვევა მიღებულია ე. წ. იაპონურწესში,რომლის თანახმად ხდება ყველა ნაკიანი თარიღის გამორიცხვა.

წ ე ს ი ACT/365, ი ა პ ო ნ ი ა. თუ J არის პერიოდი k რაოდენობის ნაკიანი თარიღით, მაშინ

$$T = T(J) = \frac{D(J) - k}{365}$$

ეს წესი გამოიყენება იაპონიის სახელმწიფო ობლიგაციების გათვლის დროს. თუ, მაგალითად, J არის პერიოდი: 14.02.1996-27.08.1996, მაშინ

$T = T(J) = \frac{195-1}{365} = 0.5315$ (წელი)

იმ შემთხვევაში, როცა ხდება დივიზორის ცვლილება, გამოიყენება ე. წ. ძირითადი წესი ნებისმიერი სიგრძის და მოკლე (ერთ წელზე ნაკლები) შუალედებისთვის.

წ ე ს ი ACT/ACT, ძ ი რ ი თ ა დ ი. ვთქვათ, J პერიოდი განსაზღვრულია $\partial_1 = \langle d, m, y_1 \rangle$, $\partial_2 = \langle d, m, y_2 \rangle$ თარიღებით, დავყოთ ეს პერიოდი სამ ნაწილად

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

სადაც,

$$J = [\partial_1, \partial_1^*), \qquad \partial_1^* = \langle 01,01,(y_1 + 1) \rangle$$

$J_2 = |y_2 - y_1|$ არის ∂_1 და ∂_2 თარიღებს შორის სრული კალენდარული წლების პერიოდი

$$J_3 = [\partial_2^*, \partial_2), \qquad \partial_2^* = \langle 01,01, y_2 \rangle$$

მაშინ გვექნება

$$T = T(J) = \frac{D(J_1)}{Y_1} + \frac{D(J_3)}{Y_3} + n$$

სადაც $D(J_k)$ არის დღეების რაოდენობა J_k k=1,3, შუალედში,

$$Y_k = \begin{cases} 366 & \text{თუ } y_k \text{ ნაკიანია} \\ 365 & \text{თუ } y_k \text{ არანაკიანია} \end{cases}$$

ხოლო $n = y_2 - y_1$ არის ∂_1 და ∂_2 თარიღებს შორის სრული სტანდარტული

კალენდარული წლების რაოდენობა.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.2. ვთქვათ, $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$ და $\partial_2 = \langle 27.08.1999 \rangle$ დავყოთ ამ თარიღებს შორის J პერიოდი სამ პერიოდად.

ა მ ო ხ ს ნ ა . პირველი J_1 პერიოდი არის 14.02.1996 და 31.12.1996 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობა. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ 1996 წელი არის ნაკიანი, მაშინ გვექნება $D(J_1) = 366 - 45 = 321$ (დღე). J_2 პერიოდი წარმოადგენს 01.01.1997 და 31.12.1998 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობას. $D(J_2) = 365 + 365 = 730$ (დღე) ე. ი. $n = 1999 - 1996 = 3$ (სრული კალენდარული წელი).

J_3 პერიოდისთვის გვაქვს 01.01.1999 და 27.08.1999 თარიღებს შორის დღეების რაოდენობა, რომელიც 238 დღისგან შედგება, ამრიგად, ACT/ACT ძირითადი წესის მიხედვით გვექნება

$T = T(Y) = \frac{321}{366} + \frac{238}{365} + 2 = 3,5291$ (წელი)

კერძო შემთხვევებში J_2 და J_3 პერიოდები შეიძლება ცარიელი იყოს, ასე მაგალითად, თუ ∂_1 და ∂_2 თარიღები ერთ სტანდარტულ კალენდარულ წელშია, მაშინ $J_2 \neq \emptyset$ და $J_3 \neq \emptyset$, ხოლო თუ ეს თარიღები მომიჯნავე წლებშია, მაშინ $J_2 = \emptyset$.

იმ შემთხვევაში, როცა J პერიოდი ერთ წელზე ნაკლებია, მაშინ გამოიყენება ACT/ACT ძირითადი წესის ე. წ. მოკლე მოდიფიკაცია.

წ ე ს ი ACT/ACT, მ ო დ ი ფ ი კ ა ც ი ა . ეს წესი გამოიყენება, მაგალითად, ობლიგაციებზე დაგროვებული კუპონების დასათვლელად და აქვს შემდეგი სახე

$$T = T(J) = \frac{D(J)}{Y}$$

სადაც,

$$Y = \begin{cases} 366 \ \text{დღე} & \text{თუ } J \text{ ნაკიანია} \\ 365 \ \text{დღე} & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში} \end{cases}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.3. ვთქვათ, J არის ნაკიანი 1996 წლის პერიოდი

თარიღებით $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$ და $\partial_1 = \langle 27.08.1996 \rangle$, გამოთვალეთ T-ს

ხანგრძლივობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა . რადგან 1996 წელი ნაკიანია, ამიტომ გვექნება

$T = T(J) = \frac{195}{366} = 0.5328$ (წელი)

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.4. ვთქვათ, J არის არანაკიანი 1998 წლის პერიოდი

თარიღებით $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$ და $\partial_2 = \langle 27.08.1996 \rangle$, გამოთვალეთ T-ს

ხანგრძლივობა.

ა მ ო ხ ს ნ ა . რადგან 1998 წელი არანაკიანია , ამიტომ გვექნება

$T = T(J) = \frac{194}{365} = 0.5315$ (წელი)

შევნიშნოთ, რომ მაგალითი 3.2-3.3-ში განხილული თარიღებისათვის იმავე შედეგებს მივიღებთ, თუ გამოვიყენებთ ACT/ACT ძირითად წესს, რადგანაც თარიღები ერთი

სტანდარტული წლის თარიღებია. თუ თარიღები მომიჯნავე წლებს ეკუთვნის, მაშინ ძირითადმა და მოკლე წესებმა შეიძლება სხვადასხვა შედეგებამდე მიგვიყვანოს.

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.5. ვთქვათ, J არის პერიოდი თარიღებს შორის: $\partial_1 = \langle 27.08.1996\rangle$ და $\partial_2 = \langle 14.02.1997\rangle$

გამოთვალეთ $T = T(J)$ ხანგრძლივობა ძირითადი წესის მიხედვით.

გამოთვალეთ $T = T(J)$ ხანგრძლივობა მოკლე წესის მიხედვით.

ა მ ო ხ ს ნ ა . 1. ძირითადი წესის მიხედვით გვაქვს $J_1 = 125$ დღე, $J_2 = \emptyset$, $J_3 = 144$ დღე.

ამრიგად, გვექნება

$T = T(J) = \frac{125}{366} + \frac{144}{365} = 0{,}4621$ (წელი)

2.რადგან J პერიოდი არა არის ნაკიანი, ამიტომ მოკლე წესის თანახმად გვექნება

$T = T(J) = \frac{125+144}{365} = 0{,}4630$ (წელი)

შევნიშნავთ, რომ ACT/ACT მოკლე წესი ემთხვევა ACT/365 ISDA წესს, რომელიც, გამოიყენება სვოპ დილერების საერთაშორისო ასოციაციისმიერ.

აქამდე განხილულ წესებში ხდებოდა პერიოდის ხანგრძლივობის ზუსტი დათვლა დღეებში (წლებში). ფინანსურ ბაზრებზე მიღებულია მიახლოებითი (გამარტივებული) დათვლა, რომელიც იმაში მდგომარეობს, რომ ყველა თვე-ში დღეების რაოდენობა 30-ის ტოლად ითვლება.

ასეთ შემთხვევაში წელი შედგება 12×30 = 360 დღისგან და (3.13) ფორმულა ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$T = \frac{\widetilde{D}(J)}{Y} = \frac{\widetilde{D}(J)}{360}$$

სადაც $Y = 360$ დივიზორია, ხოლო $\widetilde{D}(J)$ არის დღეების ხანგრძლივობა, რომელიც სხვადასხვა წესით შეირჩევა.

წ ე ს ი 30/360 ძ ი რ ი თ ა დ ი. ვთქვათ, J პერიოდისთვის გვაქვს ორი თარიღი $\partial_1 = \langle d_1, m_1, y_1\rangle$ და $\partial_2 = \langle d_2, m_2, y_2\rangle$. დღეების მიახლოებითი რაოდენობა დაითვლება შემდეგი ფორმულით

$$\widetilde{D}(\partial_1, \partial_2) = 360 \cdot (y_2 - y_1) + 30 \cdot (m_2 - m_1) + (d_2 - d_1)$$

ხოლო ხანგრძლივობა წლებში

$$T = T(J) = \frac{\widetilde{D}(J)}{360}$$

მ ა გ ა ლ ი თ ი 3.6. ვთქვათ, J არის $\partial_1 = \langle 14.02.1996 \rangle$ და $\partial_2 = \langle 27.08.1999 \rangle$ თარიღებს შორის პერიოდი, გამოთვალეთ $\widetilde{D}$ და T ხანგრძლივობები დღეებში და წლებში.

ა მ ო ხ ს ნ ა . დღეების მიახლოებითი რაოდენობაა

$\widetilde{D} = 360 \cdot 3 + 30 \cdot 6 + (27 - 14) = 1273$

ხოლო წლების ხანგრძლივობა

$$T = T(J) = \frac{1273}{360} = 3.5361$$

შევნიშნავთ, რომ მაგალითი 3.1-ში $y_2 - y_1$ სხვაობა ორის ტოლი იყო, ხოლო ზუსტი დღეების რაოდენობა კი -1291 დღე.

მიახლოებით ძირითად წესს აქვს სხვადასხვა მოდიფიკაციები, რომლებიც შეეხება თვეების ხანგრძლივობების გარდაქმნებს. ჩვენ განვიხილავთ ოთხ ასეთ მოდიფიკაციას $\partial_1 = \langle d_1, m_1, y_1 \rangle$ და $\partial_2 = \langle d_2, m_2, y_2 \rangle$ ორი თარიღისათვის.

წ ე ს ი 30/360 ISDA. თუ $d_1 = 31$ მაშინ ვიღებთ $d_1{}^* = 30$ ე. ი. $d_1 \neq d_1{}^*$. თუ $d_2 = 31$ და $d_1{}^* = 30$, მაშინ $d_2{}^* = 30$ ე. ი. $d_2{}^* \neq d_2$.

წ ე ს ი 30/360 PSA (PUBLIC SECURITIES ASSOCIATES). თუ $d_1 = 31$ ან d_1 თებერვლის ბოლო დღეა, მაშინ $d_1{}^* = 30$ ე. ი. $d_1 = d_1{}^*$. თუ $d_2 = 31$ და $d_1{}^* = 30$, მაშინ $d_2{}^* = 30$ ე. ი. $d_2{}^* \neq d_2$.

წ ე ს ი 30E/360. თუ $d_1 = 31$ მაშინ $d_1{}^* = 30$ ე. ი. $d_1 = d_1{}^*$. თუ $d_2 = 31$ და $d_1{}^* = 30$, მაშინ $d_2{}^* = 30$ ე. ი. $d_2{}^* \neq d_2$.

ეს წესი გამოიყენება ევროპაში და წარმოადგენს წინა ორი წესის კომბინაციას.

წ ე ს ი 30/360 SIA (SECURITIES INDUSTRY ASSOCIATION). თუ $d_1 = 31$ ან d_1 ობლიგაციის კუპონის გადახდის დღეა და ამავე დროს თებერვლის ბოლო დღეა, მაშინ $d_1{}^* = 30$ ე. ი. $d_1 = d_1{}^*$. თუ $d_2 = 31$ და $d_1 = 30$, მაშინ $d_2{}^* = 30$ ე. ი. $d_2{}^* \neq d_2$.

შევნიშნავთ, რომ არსებობს ცხრილები, რომლის საშუალებითაც ხდება ამ წესების მიხედვის დღეების მიახლოებითი რაოდენობის გამოთვლა. შევნიშნავთ აგრეთვე, რომ

მოტანილი წესების წარმოშობა და გამოყენება დამოკიდებულია ქვეყანაზე, ვალუტაზე, ფინანსური ინსტრუმენტის სახეზე, ემიტენტის მიერ დადგენილ შეთანხმებებზე და სხვა.

წესი ACT/365 გამოიყენება ბაზრის ინსტრუმენტებისათვის დიდ ბრიტანეთში და იაპონიაში (იაპონური ვარიანტი).

წესი ACT/360 გამოიყენება საფრანგეთში ფულის ბაზარზე. წესი 30/360 გამოიყენება ამერიკაში ობლიგაციების ბაზარზე.

წესი 30E/360 გამოიყენება ევროობლიგაციების ბაზრებზე აგრეთვე გერმანიასა და ჰოლანდიაში.

წესი ACT/ACT გამოიყენება ამერიკის ხაზინის მიერ აგრეთვე საფრანგეთისა და ავსტრალიის ფინანსურ ბაზრებზე.

ამრიგად, მოტანილი ქრონოლოგიის მიხედვით საკმაოდ შრომატევადია დროითი შეთანხმებების შესაბამისი ფინანსური გარიგებების ანალიზი. ამასთან ერთად, საჭიროა სხვადასხვა დროითი ერთეულების ერთმანეთთან დაკავშირება და გადათვლა. ასე მაგალითად, დრო თვეებში შეიძლება გარდავქმნათ წლების მიხედვით დროით სკალაზე შემდეგი ფორმულით

$$T = \frac{M}{12}$$

სადაც M არის ვადა თვეებში, T -წლებში ან კიდევ W - ვადა კვირეებშიშეიძლება გამოვსახოთ წლებში ფორმულით

$$T = \frac{W}{52}$$

ანალოგიურად შეიძლება გარდავქმნათ წლებში ვადები, მოცემულ დღეებში, კვარტალებში და სხვა.

შევნიშნავთ, რომ წიგნის ბოლოს მოტანილია ნაკიანი და არანაკიანი წლების დღეების ნომრების და აგრეთვე თარიღებს შორის დღეების რაოდენობისგამოთვლის მაგალითების ცხრილები.

§ 4 ფინანსური (B , S) - ბაზრის სამაქტივიანი ბინომური მოდელი

განვიხილოთ სამაქტივიანი ბინომური ფინანსური (B , S) - ბაზრის მოდელი

$$B_n = B_n^1 + B_n^2 \tag{4.1}$$

სადაც n= 0,1, …, N დროის მომენტებია.ამასთან

$$B_n = (1+r)\, B_{n-1}\,, \quad B_0 > 0\,, \tag{4.2}$$

$$B_n^1 = (1+r_1)B_{n-1}{}^1, \qquad B_n^2 = (1+r_2)B_{n-1}{}^2 \tag{4.3}$$

სადაც, r, r_1 და r_2 საპროცენტო განაკვეთებია.

ასეთ შემთხვევაში

$$r = r_n = \frac{r_1 \cdot B_{n-1}^1 + r_2 \cdot B_{n-1}^2}{B_{n-1}^1 + B_{n-1}^2} \tag{4.4}$$

განვსაზღვროთ აგრეთვე რისკ-ნეიტრალური ზომა შემდეგი ტოლობით

$$p^* = p_n^* = \frac{r_n - a}{b - a} \tag{4.5}$$

მოდელის მეორე კონპონენტია აქცია

$$S_n = (1+\rho_n)\, S_{n-1}\,, \quad S_0 > 0\,, \tag{4.6}$$

ρ_n დამოუკიდებელ და ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობაა. ამასთან $P(\rho_n=b)=p$, $P(\rho_n=a)=1-p=q$, $-1<a<r<b$.

როგორც ვიცით, ევროპული ტიპის ოფციონის ფასდადების ამოცანა $f=f_n$ გადახდის ფუნქციით მდგომარეობს შემდეგში:

ოფციონის C_N სამართლიანი ფასის დადგენა ;

მინიმალური π_n^* ჰეჯის აგება ;

მინიმალური ჰეჯის შესაბამისი $X_n^{\pi^*}$ კაპიტალის პროცესის განსაზღვრა.

ცხადია, მინიმალური ჰეჯისთვის უნდა სრულდებოდეს

$$X_n^{\pi^*}=\beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N = f\,(S_N)$$

ტოლობა.

სამართლიანია შემდეგი ზოგადი დებულებები

დებულება 4.1. ვთქვათ, ვიხილავთ (4.1)-(4.6) მოდელს და ევროპული ტიპის ოფციონის გადახდის f=f_N=f_N (S_0, S_1, ..., S_N) ფუნქციას. მაშინ

ოფციონის სამართლიანი ფასია

$C_N = E^*(1+r)^{-N} \cdot f_N$,

სადაც E^* არის

$p^*= P^*(\rho_n=b)= \frac{r_n-a}{b-a}$ (4.7)

ზომით გასაშუალოება.

არსებობს თვითდაფინანსებადი მინიმალური $\pi_n^*=(\beta_N^*, \gamma_N^*)$ ჰეჯი, რომლის კომპონენტებია:

$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \gamma_n^* S_{n-1}}{B_{n-1}}$,

$\gamma_n^* = \frac{\alpha_n^* B_n}{S_{n-1}}$,

სადაც α_k^* არის $\mathcal{F}_{k-1}$-ზომადი ფუნქციები.

მინიმალური $\pi_n^* = (\beta_n^*, \gamma_n^*)$ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალი

$X_n^{\pi^*}=E^*((1+r)^{-(N-n)} \cdot f_n | \mathcal{F}_n)$.

დებულება 4.2. ვთქვათ, ფინანსური (B , S)-ბაზარზე განიხილება ევროპული ტიპის ოფციონი $f_N = f(S_N)$ გადახდის ფუნქციით. მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

ოფციონის სამართლიანი ფასია

$C_N= C(f_N)= (1+r)^{-N} \cdot \mathcal{F}_N(S_0 ; p^*)$,

სადაც p^* განისაზღვრება (4.5) ტოლობით, ხოლო

$\mathcal{F}_n(x ; p)=\sum_{k=1}^{n} f(x(1+b)^k (1+a)^{n-k}) C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$. (4.8)

მინიმალური $\pi^*=(\beta, \gamma^*)$ ჰეჯის შესაბამისი კაპიტალის ევოლუცია მოიცემა

$X_n^{\pi^*}=(1+r)^{-(N-n)} \cdot \mathcal{F}_{N-n}(S_0 ; p^*)$

ფორმულით.

არსებობს მინიმალური π^*=(β, γ^*) ჰეჯი, რომლის კომპონენტები განისაზღვრება

$$\beta_n^* = \frac{X_{n-1}^{\pi^*} - \tilde{\gamma} S_{n-1}}{B_{n-1}},$$

$$\gamma_n^* = (1+r)^{-(N-n)} \frac{\mathcal{F}_{N-n}(S_{n-1}(1+b);p^*) - \mathcal{F}_{N-n}(S_{n-1}(1+a);p^*)}{S_{n-1}(b-a)}$$

ფორმულებით .

§ 5 კოქსის, როსის და რუბინშტეინის ფორმულა

განვიხილოთ მოდელი (4.1)- (4.6) და ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის

$$f_N = f(S_N) = (S_N - K)^+ \quad (5.1)$$

ფუნქციით, სადაც $(x)^+$= max $(x;0)$ ხოლო, K>0 შეთანხმების (საკონტრაქტო) ფასია , ანუ ემიტენტი ვალდებულია ოფციონის მფლობელს მიჰყიდოს აქცია K ფასად დროის N მომენტში .

სამართლიანია ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასის კოქსის, როსის და რუბინშტეინის განზოგადოებული ფორმულა სამაქტივიანი ბინომური ფინანსური ბაზრის შემთხვევაში

$$C_N = (1+r)^{-N}\mathcal{F}_N(S_0\,;\,p^*) = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k$$

$$-K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \quad (5.2)$$

ფორმულით,

სადაც p^* განისაზღვრება 4.5 ფორმულით, ხოლო $k_0 = k_0(a,b,S_0,K)$ უმცირესი მთელი რიცხვია, რომლისთვისაც სრულდება

$$S_0\,(1+a)^N \left(\frac{a+b}{1+a}\right)^{k_0} > K$$

უტოლობა .

ემიტენტის ძირითადი ამოცანაა მინიმალური ჰეჯის აგება.

დამტკიცება : გადახდის (5.1) ფუნქციის შემთხვევაში გვექნება

$\mathcal{F}_N\,(S_0;p^*)=\sum_{k=0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}\ max\,(0, S_0\ (1+a)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - \mathrm{K}).$ (5.3)

შევნიშნოთ, რომ თუ $k_0 > N$, მაშინ $\mathcal{F}_N\ (S_0\,;p\,)=0$ და ამ შემთხვევაში სამართლიანი ფასია $C_N = 0$. თუ $k_0 \le N$, მაშინ (5.3)- დან ადვილად მივიღებთ დასამტკიცებელ (5.2) ფორმულას

§ 6 ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულა

განვიხილოთ ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონი გადახდის

$f_N = f(S_N)=(\,K - S_N)^+$ (6.1)

ფუნქციით. ამ შემთხვევაში ოფციონის სამართლიანი P_N ფასი შეიძლება ვიპოვოთ (5.2) ფორმულის გამოყენებით . P_N- ის ფორმულას ყიდვა-გაყიდვის პარიტეტის ფორმულა ეწოდება .

შედეგი 1.1. ევროპული ტიპის გაყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი P_N ფასი გადახდის (6.1) ფუნქციით გამოითვლება

$P_N = C_N - S_0 + \mathrm{K}\ (1+r)^{-N}.$ (6.2)

ფორმულით .

დამტკიცება **:** გვაქვს

$max\,(0, K - S_N\,) = max\,(\,S_N - \mathrm{K},0)\ - S_N\ + \mathrm{K}.$

ამიტომ

$P_N = E^*\ (1+r)^{-N}\, max\,(0, K - S_N\,) = C_N - E^*(1+r)^{-N}\, S_N\ + \mathrm{K}\ (1+r)^{-N}.$

ახლა, თუ შევნიშნავთ რომ $E^* S_N\ = (1+r)^{-N}\ S_0$ მაშინ მივიღებთ დასამტკიცებელ (6.2) ფორმულას.

§ 7 მოპასუხე პორტფელის პრინციპი. მინიმალური ჰეჯი

მინიმალური ჰეჯის ასაგებად გამოიყენება ე.წ. მოპასუხე პორტფელის პრინციპი, რომელიც შე,დეგში მდგომარეობს: ვთქვათ, დროის n მომენტში ინვესტორის $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალია

$$X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n \,.$$

საჭიროა ავაგოთ ისეთი $\pi_{n+1} = (\beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$ პორტფელი , რომ დროის n მომენტში მისი შესაბამისი კაპიტალი

$$X_n^\pi = \beta_{n+1} B_n + \gamma_{n+1} S_n \tag{7.1}$$

დროის (n+1) მომენტში ტოლი უნდა იყოს

$$X_{n+1}^\pi = \beta_{n+1} B_{n+1} + \gamma_{n+1} S_{n+1} = f\,(S_{n+1}) \tag{7.2}$$

სიდიდის, სადაც $f = f\,(S_N)$ გადახდის რაიმე ფუნქციაა, n=0,1,…,N. (4.1)-(4.6) მოდელის შემთხვევაში უცნობი β_{n+1} და γ_{n+1} პარამეტრებისათვის (7.2) ტოლობიდან მივიღებთ ორუცნობიან წრფივ განტოლებათა

$$\beta_{n+1}(1+r)B_{n+1} + \gamma_{n+1}(1+b)S_{n+1} = f\,((1+b)S_n)\,,$$

$$\beta_{n+1}(1+r)B_n + \gamma_{n+1}(1+a)S_n = f\,((1+a)S_n)\,,$$

სისტემას, რომლის β_{n+1}^* და γ_{n+1}^* ამონახსნი მოიცემა

$$\beta_{n+1}^* = \frac{(1+b)f\,((1+a)S_n) - (1-a)\,f\,((1+b)S_n)}{(1+r)\,(b-a)B_n}\,, \tag{7.3}$$

$$\gamma_{n+1}^* = \frac{f\,((1+b)S_n) - f\,((1+a)S_n)}{(b-a)S_n}\,, \tag{7.4}$$

ფორმულებით, დროის N მომენტში გვექნება $\pi_N^* = (\beta_N^*, \gamma_N^*)$ პორტფელის შესაბამისი

$$X_n^{\pi^*} = \beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N = f\,(S_N)$$

კაპიტალი.

ამრიგად, მოპასუხე პორტფელის პრინციპით აგებული $\pi^* = (\beta^*, \gamma^*)$ პორტფელი არის მინიმალური ჰეჯი. ადვილი შესამოწმებელია, რომ ის თვითდაფინანსებადი სტრატეგიაა

თუ (7.3) და (7.4) სიდიდეებს შევიტანთ (7.1) ტოლობაში β_{n+1} და γ_{n+1} სიდიდეების მაგივრად, მაშინ ადვილად მივიღებთ $X_N^{\pi^*}$ კაპიტალის წარმოდგენას.

$$X_N^{\pi^*} = (1+r)^{-1}[\,p^* f((1+b)S_n) + (1-\,p^*)\,f((1+a)S_n)]$$

§ 8 რეკურენტული ფორმულები

აქციის ფასების, გადახდის ფუნქციის მნიშვნელობებისა და ოფციონის სამართლიანი ფასის გამოთვლისთვის გამოიყენება შემდეგი რეკურენტული ტოლობები :

- ბოლო, ფინალური n=N მომენტში გვაქვს N+1 მნიშვნელობა :

  $f_{N,j} = f(S_{N,j})$, j=0,1,…,N

- ბოლოს წინა n=N-1 მომენტში
  $C_{N-1,j} = (1+r)^{-1}\left[\,p^* f_{N.j+1} + (1-\,p^*)\,f_{N,j}\right]$, j=0,1,…, N-1.
  და ა.შ.

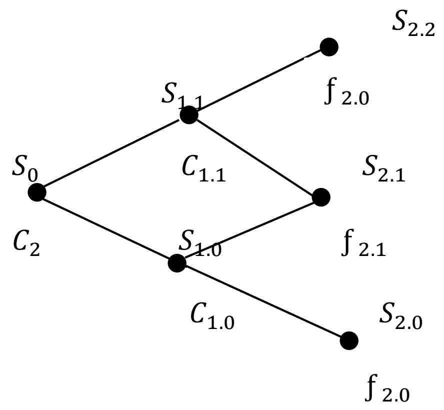
- n=N-k მომენტში
  $C_{N-k,j} = (1+r)^{-1}\left[\,p^* C_{N-k+1.j+1} + (1-\,p^*)\,C_{N-k+1,j}\right]$, j=0,1,…, N-k.
  და ა.შ

- n=N-N=0 მომენტში გამოითვლება ოფციონის სამართლიანი
  $C_N = C_{0,0} = C\,(f_N) = (1+r)^{-1}\left[\,p^* C_{1,1} + (1-\,p^*)\,C_{1,0}\right]$ (8.1)
  ფასი.

სადაც p^* განისაზღვრება 4.5 ფორმულით.

§ 9 ბინომური ხეები

(8.1) ტოლობების გამოყენებით, ხშირად, თვალსაჩინოების მიზნით, აგებენ ე.წ. ბინომურ ხეებს. მაგალითად, ოფციონის ფასდადების ორნაბიჯიან ამოცანაში ბინომურ ხეს ექნება სახე:



ნახაზი 1.1. ორნაბიჯიანი ბინომური ხე

ნახაზზე 1.1 მოყვანილია შემდეგი სიდიდეები

$S_{2.0} = S_0(1+a)^2,$ $\qquad f_{2.0} = f(S_{2.0})$

$S_{2.1} = S_0(1+b)(1+a)\,,$ $\qquad f_{2.1} = f(S_{2.1})$

$S_{2.2} = S_0\,(1+b)^2\,,$ $\qquad f_{2.2} = f(S_{2.2})$

$S_{1.0} = S_0(1+a)\,,$

$S_{1.1} = S_0(1+b)\,,$

$$C_{1.0} = (1+r)^{-1}\left[\,p^* f_{2,1} + (1-p^*)\,f_{2,0}\right] \tag{9.1}$$

$$C_{1.1} = (1+r)^{-1}\left[\,p^* f_{2,2} + (1-p^*)\,f_{2,1}\right] \tag{9.2}$$

ხოლო ოფციონის სამართლიანი ფასია

$$C_2 = C\,(f_2) = (1+r)^{-1}\left[\, p^* C_{1,1} + (1-p^*)\, C_{1,0}\right] \tag{9.3}$$

§ 10 ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის ფასდადების ორნაბიჯიანი რიცხვითი მაგალითი

მაგალითი 10.1. განვიხილოთ,

$$B_n = (1+r)B_{n-1}\,, \qquad B_0 > 0$$

$$S_n = (1+\rho_n)S_{n-1}\,, \qquad S_0 > 0 \qquad n = 0,1,\dots N$$

ფინანსური ბაზარი და ვთქვათ, $\mathrm{N} = 2$, ე.ი. $n = 0,1,2$.ვიგულისხმოთ, რომ შესრულებულია

$$B_0 = 20, \quad r = \frac{1}{5}$$

$S_0 = 100 \quad \rho_n = b = \frac{3}{5}$ ან $\rho_n = a = \frac{2}{5}$, $\quad n = 0,1,\dots N$

პირობები. დავუშვათ, ინვესტორმა იყიდა (ემიტენტმა გაყიდა) ევროპული ტიპის სტანდარტული ოფციონი გადახდის ფუნქციით

$$f = f(S_2) = \max(S_2 - K, 0). \tag{10.1}$$

ჩვენი მიზანია, გადავწყვიტოთ ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა. ამისათვის, პირველ რიგში ავაგოთ ონაბიჯიანი ბინომური ხე. დროის $n = 2$ მომენტში ბინომური ხის სამ ფინალურ (ბოლო) კვანძში აქციის შესაძლო ფასების მნიშვნელობებისთვის ტოლობების თანახმად გვექნება:

$$S_{2,0} = S_0(1+b)^0(1+a)^2 = 100\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^2 = 36, \tag{10.2}$$

$$S_{2,1} = S_0(1+b)(1+a) = 100\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{3}{5} = 936, \tag{10.3}$$

$$S_{2,2} = S_0(1+b)^2(1+a)^0 = 100\cdot\left(\frac{8}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 256, \tag{10.4}$$

$$S_{2,0} = f(S_{2,0}) = \max\big(S_{2,0} - K, 0\big)\max(36 - 100,0) = 0, \tag{10.5}$$

$$S_{2,1} = f(S_{2,1}) = \max\big(S_{2,1} - K, 0\big)\max(96 - 100,0) = 0, \tag{10.6}$$

$$S_{2,2} = f(S_{2,2}) = \max\big(S_{2,2} - K, 0\big) \max(256 - 100{,}0) = 156 \tag{10.7}$$

დროის $n = 1$ მომენტში შესაბამის ორ კვანძში ჩვენ გამოთვლილი გვაქვს აქციის შესაძლო ფასები

$$S_{1,0} = S_0(1 + a) = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60$$

$$S_{1,1} = S_0(1 + b) = 100 \cdot \frac{8}{5} = 160$$

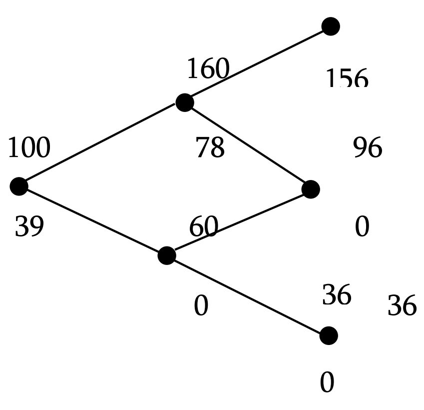
ტოლობებით, რომლთა თანახმად $S_{1,0} = 60$, $S_{1,1} = 160$. შემდეგ ფორმულების თანახმად გვექნება:

$$C_{1,0} = (1 + r)^{-1}\big[p^* f_{2,1} + (1 - p^*) f_{2,2}\big] = \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 0 \tag{10.8}$$

$$C_{1,1} = (1 + r)^{-1}\big[p^* f_{2,2} + (1 - p^*) f_{2,1}\big] = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} \cdot \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \cdot 156 + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}} \cdot 0\right) = 78 \tag{10.9}$$

$$C_2 = (1 + r)^{-1}\big[p^* C_{1,1} + (1 - p^*) C_{1,0}\big] = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}} \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 78 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 39 \tag{10.10}$$

ამრიგად, ორნაბიჯიან ბინომურ ხეს ექნება შემდეგი სახე:



გამოვთვალოთ C_2 სიდიდის მნიშვნელობა, აგრეთვე,

$$C_N = S_0 \sum_{k=k_0}^{N} C_N^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} C_n^k (p^*)^k (1-p^*)^{N-k}$$

ფორმულით. $N = 2$ შემთხვევაში

$$S_0(1+a)^N \cdot \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k_0} > K$$

უტოლობა ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$S_0(1+a)^2 \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{k_0} > K$$

ვთქვათ $k_0 = 0$, მაშინ გვექნება

$$100 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^0 > 100$$

საიდანაც მივიღებთ არასწორ უტოლობას $\frac{9}{25} > 1$

ვთქვათ, $k_0 = 1$

$$100 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}} > 100$$

საიდანაც კვლავ არასწორი უტოლობა $\frac{24}{25} > 1$ გვაქვს.

ვთქვათ $k_0 = 2$, მაშინ გვექნება

$$100 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^2 > 100$$

საიდანაც მივიღებთ სწორ უტოლობას $\frac{64}{25} > 1$

ამრიგად, $k_0 = 2$, კიდევ ერთხელ შევნიშნოთ რომ k_0-ის მნიშვნელობა შეიძლება უშუალოდ გამოვთვალოთ

$$k_0 = 1 + \left[\ln\frac{K}{S_0(1+a)N} \middle/ \ln\frac{1+b}{1+a}\right]$$

ფორმულით გვექნება

$$C_2 = S_0 C_2^2 (p^*)^2 (1-p^*)^2 \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^2 - K(1+r)^{-2} C_2^2 (p^*)^2 (1-p^*)^2 = 100 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{8}{5}}{\frac{3}{5}}\right)^2 - 100 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^0 = 39$$

ემიტენტის წინაშე დგას შემდეგი ამოცანა: ოფციონის გაყიდვით მიღებული C_2 თანხით (შესაძლოა კიდევ ნასესხები თანხით) დროის $n=0$ მომენტში მან უნდა ააგოს $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$ მინიმალური ჰეჯი. დროის $n=1$ მომენტში ამ პორტფელის შესაბამისი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი. რომლის შესაბამისი კაპიტალი, დროის $n=2$ მომენტში ობლიგაციისა და აქციის ფასების ახალი მნიშვნელობების გათვალისწინებით, ზუსტად $f(S_2)$ სიდიდის ტოლი იქნება .

ფორმულების თანახმად გვექნება :

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{1,0} - (1+a)C_{1,1}}{(1+r)(b-a)B_0} = \frac{\frac{8}{5}\cdot 0 - \frac{3}{5}\cdot 78}{\frac{6}{5}\cdot 1\cdot 20} = -\frac{39}{20} \qquad (10.11)$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{1,1} - C_{1,0}}{(b-a)S_0} = \frac{78-0}{1\cdot 100} = \frac{39}{50} \qquad (10.12)$$

ამრიგად მივიღებთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$ ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n=0$ მომენტში ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად შემდეგი სახით:

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* B_0 + \gamma_1^* S_0 = -\frac{39}{20} \cdot 20 + \frac{39}{50} \cdot 100 = 39 \qquad (10.13)$$

$$X_0^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[\, p^* C_{1,1} + (1-p^*)\, C_{1,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 78 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 39. \qquad (10.14)$$

ა მ ო ც ა ნ ა 10.2. დროის $n=0$ მომენტში ჩვენ ავაგეთ $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$ სტრატეგია.

1. C_2=39-ის ტოლი თანხით ააგეთ რაიმე $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ საწყისი ტრაგედია
2. შეამოწმეთ ტოლობა $X_0^{\pi} = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$
3. შეამოწმეთ თვითდაფინანსების $\Delta\beta_1 B_0 + \Delta\gamma_1 S_0 = 0$ პირობა

   $\Delta\beta_1^* B_0 + \Delta\gamma_1^* S_0$=0,

სადაც, $\Delta\beta_1^* = \beta_1^* - B_0$, $\Delta\gamma_1^* = \gamma_1^* - \gamma_0$

ახლა გავაანალიზოთ რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 0$ მომენტში. ოფციონის გაყიდვით მან მიიღო 39-ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{39}{20}$ ობლიგაცია, ანუ $\frac{39}{20} \cdot 20 = 39$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{50}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან

$$\frac{39}{50} \cdot 100 = 78 = 39 + 39 = 78$$

დროის $n = 1$ მომენტში $X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = f(S_1)$ ფორმულის თანახმად

$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$

პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით

$$X_1^{\pi^*} = \beta_1^* B_1 + \gamma_1^* S_1 = -\frac{39}{20} B_1 + \frac{39}{50} S_1 = f(S_1) \tag{10.15}$$

ნახაზ 10.2.-ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემდეგი ორი შემთხვევა

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა I. ვთქვათ $S_1 = S_{1,1} = 160$ ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$ ასეთ შემთხვევაში (10.15)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = -\frac{39}{20} \cdot 24 + \frac{39}{50} \cdot 160 = 78 \tag{10.16}$$

შევნიშნოთ, რომ (10.16) ტოლობით გამოთვლილი $X_1^{\pi^*}$ კაპიტალის მნიშვნელობა დროის $n = 1$ მომენტში ნახაზ 10.2.-ზე მოცემული $S_{1,1}$ კვანძში ოფციონის $C_{1,1}$ ფასის მნიშვნელობის ტოლია.

დროის $n = 1$ მომენტში $X_1^{\pi^*} = 78$-ის ტოლი თანხით ემიტენტმა უნდა ააგოს $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი. ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,1} - (1+a)f_{2,2}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5} \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 156}{\frac{6}{5} \cdot 1 \cdot 24} = -\frac{13}{4} \tag{10.17}$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,2} - f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}} = \frac{156 - 0}{1 \cdot 160} = \frac{39}{40} \tag{10.18}$$

ამრიგად, მივიღებთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$ ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში ფორმულების თანახმად შეიძლება ჩავწეროთ, შესაბამისად, შემდეგი სახით :

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_{1,1} = -\frac{13}{4} \cdot 24 + \frac{39}{40} \cdot 160 = 78 \tag{10.19}$$

$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[\, p^* f_{2,2} \; + (1-\, p^*)\; f_{2,1}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\cdot 156 + \frac{2}{5}\cdot 0\right) = 78$ (10.20)

ა მ ო ც ა ნ ა 10.3. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{50}\right)$

$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$

შეამოწმეთ თვითდაფინანსების პირობა $\Delta\beta_2^* B_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,1}$=0, სადაც $\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - B_1$, $\Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1$

ახლა გავაანალიზოთ რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 1$ მომენტში, მას აქვს 78- ის ტოლი თანხა, ისესხა $\frac{13}{4}$ ობლიგაცია , ანუ $\frac{13}{4}\cdot 24 = 78$-ის ტოლი თანხა და იყიდა $\frac{39}{40}$ აქცია, რის საშუალება მას მართლაც აქვს, რადგან $\frac{39}{40}\cdot 160 = 156 = 78 + 78 = 156$.

დროის $n = 2$ მომენტში, $X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2$ ფორმულის თანახმად $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = \left(-\frac{13}{4}, \frac{39}{40}\right)$ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* B_2 + \gamma_2^* S_2 = -\frac{13}{4}\cdot B_2 + \frac{39}{40}\cdot S_2 = f(S_2)$ (10.21)

ნახაზ 10.2- ზე მოცემული ბინომური ხის გამოყენებით ჩვენ უნდა განვიხილოთ შემთხვევა I -ის შემდეგი ორი ქვეშემთხვევა.

ქ ვ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა I. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,2} = 256$ ობლიგაციის ფასია $B_2 = (1+r)\cdot B_1 = \frac{6}{5}\cdot 24 = \frac{144}{5}$

ასეთ შემთხვევაში (10.21)-ის თანახმად გვექნება

$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} + \frac{39}{40}\cdot 256 = 156$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,2} = f(S_{2,2}) = 156$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40}\cdot 256 = \frac{1248}{5}$-ის ტოლ თანხას. ამ თანხიდან იგი გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4}\cdot\frac{144}{5} = \frac{468}{5}$ - ის ტოლ ტანხას, ხოლო დარჩენილი $\frac{1248}{5} - \frac{468}{5} = 156$ ის ტოლი თანხით შეასრულებს ოფციონის ვალდებულებას $f_{2,2} = 156$.

ქ ვ ე შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა II. ვთქვათ, $S_2 = S_{2,1} = 96$ ასეთ შემთხვევაში (10.21)-ის თანახმად გვექნება

$X_2^{\pi^*} = -\frac{13}{4} \cdot \frac{144}{5} + \frac{39}{40} \cdot 96 = 0$

რაც ზუსტად პასუხობს ოფციონის ვალდებულებას

$$f_{2,1} = f(S_{2,1}) = 0$$

ემიტენტი გაყიდის $\frac{39}{40}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{40} \cdot 96 = \frac{468}{5}$ -ის ტოლ თანხას. რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{13}{4}$ ობლიგაციის ვალს ანუ $\frac{13}{4} \cdot \frac{144}{5} = \frac{468}{5}$ - ის ტოლ თანხას, ხოლო ოფციონის ვალდებულებით ის არაფერს იხდის , რადგან $f_{2,1} = 0$.

შ ე მ თ ხ ვ ე ვ ა II. ვთქვათ, $S_1 = S_{1,0} = 60$ ობლიგაციის ფასი $B_1 = 24$ ასეთ შემთხვევაში (10.15)-ის თანახმად გვექნება

$$X_1^{\pi^*} = \frac{39}{20} \cdot 24 + \frac{39}{50} \cdot 60 = 0 \qquad (10.22)$$

რაც ზუსტად ემტხვევა $C_{1,0}$-ის მნიშვნელობას.

ავაგოთ ამ შემთხვევაში $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$ მინიმალური ჰეჯი , ფორმულების თანახმად გვექნება

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,0} - (1+a)f_{2,1}}{(1+r)(b-a)B_1} = \frac{\frac{8}{5} \cdot 0 - \frac{3}{5} \cdot 0}{\frac{6}{5} \cdot 1 \cdot 24} = 0 \qquad (10.23)$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,1} - f_{2,0}}{(b-a)S_{1,0}} = \frac{0-0}{1 \cdot 60} = 0 \qquad (10.24)$$

ამრიგად , მივიღეთ $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (0,0)$ ამ პორტფელის შესაბამისი კაპიტალი დროის $n = 1$ მომენტში, ფორმულების თანახმად, შეიძლება ჩავწეროთ შესაბამისად შემდეგი სახით

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* B_1 + \gamma_2^* S_{1,0} = 0 \cdot 24 + 0 \cdot 60 = 0 \qquad (10.25)$$

$$X_1^{\pi^*} = (1+r)^{-1}\left[\, p^* f_{2,1} + (1-p^*)\, f_{2,0}\right] = \frac{5}{6}\left(\frac{3}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 0\right) = 0 \qquad (10.26)$$

ა მ ო ც ა ნ ა 10.4. დროის $n = 0$ და $n = 1$ მომენტებში ჩვენ ავაგეთ შემდეგი სტრატეგიები

$\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*) = \left(-\frac{39}{20}, \frac{39}{40}\right)$

$\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*) = (0,0)$

შეამოწმეთ თვითდაფინანსების პირობა $\Delta\beta_2^* B_1 + \Delta\gamma_2^* S_{1,0}$=0, სადაც $\Delta\beta_2^* = \beta_2^* - B_1$, $\Delta\gamma_2^* = \gamma_2^* - \gamma_1$

ახლა გავაანალიზოთ რა ოპერაციები ჩაატარა ემიტენტმა დროის $n = 1$ მომენტში, იგი გაყიდის $\frac{39}{50}$ აქციას და მიიღებს $\frac{39}{50} \cdot 60 = \frac{234}{5}$ - ის ტოლ თანხას, რითაც ზუსტად გაისტუმრებს $\frac{39}{20}$ ობლიგაციის ვალს, ანუ $\frac{39}{20} \cdot 24 = \frac{234}{5}$ - ის ტოლ თანხას, განხილული შემთხვევა II- ის ორივე ქვეშემთხვევაში დროის $n = 2$ მომენტში ემიტენტი არაფერს იხდის, რადგან $f_{2,1} = f(S_{2,1})$=0, $f_{2,0} = f(S_{2,0})$=0

ამრიგად ამ მაგალითის პირობებში ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის გათვლის ორნაბიჯიანი ამოცანა გადაწყვეტილია.

დ ა ს კ ვ ნ ა

ფინანსურ ბაზარზე ფასიანი ქაღალდებით ოპერაციებს მნიშვნელოვანი ადგილი უკავია თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში. აგებულია ბაზრის სხვადასხვა სახის მათემატიკური მოდელები, რომელთაგან ზოგიერთ მათგანში შეიძლება რიცხვითი ანალიზის გამოყენება, ასეთი ბაზარია მაგალითად ორაქტივიანი ბინომური ფინანსური ბაზარი. ჩვენს მიერ შესწავლილია სამაქტივიანი ფინანსური ბაზარი რომელიც შედგება 2 ობლიგაციისგან და 1 აქციისგან . შევნიშნავთ რომ ამ შემთხვევაში არსებობს რისკ-ნეიტრალური ალბათობა რომლის გამოყენებითაც შეიძლება ოფციონის ფასდადების ამოცანის თეორიული და რიცხვითი ანალიზით გადაწყვეტა . მიღებულია ევროპული ტიპის ყიდვის სტანდარტული ოფციონის სამართლიანი ფასის ცხადი ფორმულა რომელიც წარმოადგენს კოქსის, როსის და რუბინშტეინის განზოგადებას. აგებულია ორნაბიჯიანი ბინომური ხე და N ნაბიჯიან ამოცანაში ოფციონის სამართლიანი ფასის რეკურენტული ფორმულები. მიღებულია აგრეთვე მინიმალური ჰეჯის ფორმულები.

გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ უ ლ ი   ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

[1] ბაბილუა პ. დოჭვირი ბ. მელაძე ჰ. *ფინანსური მათემატიკის საწყისები.* უნივერსალი, თბილისი, 2008.

[2] პეტრე ბაბილუა , ბესარიონ დოჭვირი, ელიზბარ ნადარაია. *სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა I. დისკრეტული დრო.*

[3] დოჭვირი ბ. *ალბათობა, სტატისტიკა, ფინანსები.* უნივერსალი, თბილისი, 2009.

[4] დოჭვირი ბ. მახაშვილი ქ. , რაზმაძე ნ. *ევროპული ოფციონის ფასდადების მოდელირება,* „საქართველოს საინჟინრო სიახლენი" 2021, ტომი 92 № 1, გვ: 138-145.

[5] ლაზრიევა ნ. მანია მ. მირზაშვილი გ. ტორონჯაძე თ. ღლონტი ო. ჯამბურია ლ. *ფინანსური ანალიზის რაოდენობრივი მეთოდები.* ფონდი „ ევრაზია" , თბილისი, 1999.

[6] ღლონტი ო. *სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა.* თსუ, თბილისი, 2002.

[7] Ширяев А. *Основы стохастической финансовой математики,* т. 1, 2. «Фазис», Москва, 1998.