ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ავტორი: თეონა ნადირაძე

ხარისხოვანი MR-ჯგუფები და ტენზორული გასრულებები

სამაგისტრო პროგრამის დასახელება: **მათემატიკა**

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: მიხეილ ამაღლობელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; ფ.მ. დოსტოევსკის სახელობის ომსკის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საპატიო დოქტორი.

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნირებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

2021

სარჩევი

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

უსასრულო ჯგუფთა გამოკვლევა ხშირად აწყდება სერიოზულ სიძნელეებს, რომელთა მიზეზია შესწავლის ობიექტის სირთულე. პრაქტიკულად უსასრულო ჯგუფთა შესწავლის ყოველი მიდგომა ან ნაკლებად ეფექტურია ან გამოყენებადია მხოლოდ ჯგუფთა ვიწრო კლასებისათვის. მაგალითისათვის, მოდულთა თეორიის განვითარებული და მეტად მძლავრი ცნებათა სისტემა და ტექნიკა თავისი კლასიკური სახით გამოყენებადია მხოლოდ აბელური ჯგუფებისათვის. ამიტომ ფრიად მნიშვნელოვანია მოდულთა თეორიის იდეებისა და მეთოდების გავრცელების ამოცანა არაკომუტაციური ჯგუფების შემთხვევისათვის. ეს უჩვენებს სამაგისტრო ნაშრომის თემის აქტუალობას.

სამაგისტრო ნაშრომი ეძღვნება რგოლების მიმართ ხარისხოვანი ჯგუფების შესწავლას. ეს ცნება შემოტანილია რ. ლინდონის მიერ დაახლოებით სამოცი წლის წინ და შეისწავლებოდა მრავალი ავტორის მიერ. სამაგისტრო ნაშრომში შეისწავლება ხარისხოვანი ჯგუფები უფრო მოხერხებული აქსიომატიკით, რომელიც აზუსტებს რ. ლინდონის განსაზღვრებას და შემოთავაზებულია ა. მიასნიკოვის და ვ. რემესლენიკოვის მიერ. განხილულია ხარისხოვან ჯგუფთა თეორიის ის საკითხები, რომლებიც შეეხება მათ ზოგად თვისებებსა და მათ ტენზორულ გასრულებებს (ცნებები, რომლებიც დაკავშირებულია ხარისხოვანი ჯგუფებისათვის სკალართა რგოლების გაფართოებებთან).

ძირითადი შედეგები და სიახლე ჩადებულია თეორემა 6.2-ისა და თეორემა 6.3 (პუნქტი 2)-ის შინაარსსა და დამტკიცებებში.

S u m m a r y

Examining infinite groups often faces serious difficulties due to the complexity of the object of study. Virtually every approach to studying infinite groups is either less effective or applicable only to narrow groups of groups.For example, the developing and highly powerful system of concepts and techniques of module theory in its classical form is applicable only to Abelian groups. It is therefore very important to spread the ideas and methods of module theory in the case of non-commutative groups. This shows the urgency of the topic of the master thesis.

The master thesis is dedicated to the study of quality groups with respect to rings. This concept is introduced by R. By Lyndon about sixty years ago and has been studied by many authors. In the master thesis, qualitative groups with more convenient axioms will be studied, which clarifies R.

Lyndon definition and proposed a. Miasnikov et al. By Remeslenikov. Qualitative group theory issues related to their general properties and their tensor performance (concepts related to scaling ring extensions for quality groups) are discussed.

Key findings and novelties are included in the content and approvals of Theorem 6.2 and Theorem 6.3 (Section 2).

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

რგოლის მიმართ მოდულის ცნება აბელური ჯგუფისა და ვექტორული სივრცის ცნებების ბუნებრივი განზოგადებაა. არაერთხელ იყო ნაცადი მოდულთა თეორიის იდეების რეალიზაცია არაკომუტაციურ შემთხვევაში. თავდაპირველად შეისწავლებოდა შემთხვევა, როცა სკალართა რგოლი რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ ველია. ამასთან დაკავშირებით, მივუთითოთ ა.მალცევის თეორემა გრეხვის გარეშე ლოკალურად ნილპოტენტური ჯგუფების გასრულების შესახებ [1], კარგაპოლოვ-მერზლიაკოვ-რემესლენიკოვის შრომა [2] ჯგუფთა გასრულების შესახებ, გ. ბაუმსლაგის შედეგები თავისუფალ ჯგუფთა გასრულების შესახებ [3,4], ი.კუზმინის შრომა [5] ამოხსნად ჯგუფთა გასრულების შესახებ.

სკალართა რგოლების უფრო ფართო კლასებზე გადასვლა (ე.წ. ბინომიალურ რგოლებზე) პირველად იყო განხორციელებული ფ.ჰოლის მიერ გრეხვის გარეშე ნილპოტენტური ჯგუფებისათვის თავის საყოველთაოდ ცნობილ ნაშრომში [6].

მეორე მხრივ, რ.ლინდონის შრომაში [7] ნებისმიერი ასოციაციური ერთეულიანი რგოლისათვის (არა აუცილებლად ბინომიალური) შემოტანილია ხარისხოვანი R-ჯგუფის ზოგადი ცნება და მიღებულია ზოგიერთი შედეგი თავისუფალი R- ჯგუფებისათვის.

რ. ლინდონის ხარისხოვანი ***აბელური R- ჯგუფები ყოველთვის არ არიან R- მოდულები*** (იხ. [8], სადაც დაწვრილებითაა გამოკვლეული თავისუფალი აბელური R-ჯგუფის სტრუქტურა), რაც აძნელებს ამ ცნების გამოყენებას არათავისუფალი ჯგუფების შემთხვევებში.

ნაშრომში [9] ა. მიასნიკოვმა და ვ. რემესლენიკოვმა ლინდონის აქსიომებს დაუმატეს ერთი აქსიომა (კვაზი- იგივეობა), რომლის შედეგად აბელური ხარისხოვანი R- ჯგუფები უკვე განსაზღვრებით არიან ***ჩვეულებრივი R-მოდულები***. ეს დაზუსტება წარმოადგენს R-მოდულის ცნების ბუნებრივ განზოგადებას არაკომუტაციური ჯგუფებისათვის. ამ ნაშრომში შემოტანილია ხარისხოვან MR-ჯგუფთა $\mathcal{M}_R$ კატეგორია დაზუსტებული აზრით (შემდგომში უბრალოდ R- ჯგუფთა კატეგორია) და გადმოცემულია ასეთ ჯგუფთა თეორიის საფუძვლები.

სამაგისტრო ნაშრომი ეძღვნება ჯგუფთა შესწავლას $\mathcal{M}_R$ კატეგორიიდან. კარგადაა ცნობილი ტენზორული ნამრავლის როლი, კერძოდ სკალრათა რგოლის გაფართოება, მოდულთა კატეგორიაში. ნაშრომში [9] განსაზღვრულია უკანასკნელი კონსტრუქციის ზუსტი

ანალოგი ნებისმიერი ხარისხოვანი R-ჯგუფებისათვის – ***ტენზორული გასრულების*** საკვანძო კონსტრუქცია.

სამაგისტრო ნაშრომის §1,2,3,4-ებში თავმოყრილია [9]-ისა და [10]-ის მიხედვით ხარისხოვან MR-ჯგუფთა კატეგორიის აუცილებელი ცნებები და ფაქტები, ხოლო §5,6 ეძღვნება ნაწილობრივ MR-ჯგუფებს, რომლებიც იზომორფულად იდგმება თავის ტენზორულ გასრულებაში. მიღებულია თავისუფალი MR- ჯგუფებისა და თავისუფალი MR- ნამრავლების აღწერა ჯგუფური კონსტრუქციების ენაზე.

§1. ხარისხოვან *MR*- ჯგუფთა თეორიის ძირითადი ცნებები

ხარისხოვანი *MR*-ჯგუფის განსაზღვრება. ნაშრომის ბოლომდე დავაფიქსიროთ ნებისმიერი ასოციაციური R რგოლი ერთეულით და აგრეთვე ჯგუფი G. შესავალში იყო აღნიშნული R-ის G-ზე მოქმედების შემდეგი აქსიომები:

(1) $g^1 = g,\ \ g^0 = e,\ e^\alpha = e;$

(2) $g^{\alpha+\beta} = g^\alpha \cdot g^\beta,\ g^{\alpha\beta} = (g^\alpha)^\beta;$

(3) $(h^{-1}gh)^\alpha = h^{-1}g^\alpha h;$

(4) $[g,h] = e \Rightarrow (gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha$, სადაც

$[g,h] = g^{-1}h^{-1}\,gh.$

განსაზღვრება 1.1. G ჯგუფს ვუწოდოთ R-***ხარისხოვანი ჯგუფი*** (ან R-***ჯგუფი***) ***ლინდონის აზრით***, თუ R რგოლის მოქმედება G-ზე (1)-(3) აქსიომებს აკმაყოფილებს.

განსაზღვრება 1.2. G ჯგუფს ვუწოდოთ *MR*-***ხარისხოვანი ჯგუფი*** (ან *MR*-***ჯგუფი***) ***მიასნიკოვ- რემესლენიკოვის აზრით***, თუ R რგოლის მოქმედება G-ზე (1)-(4) აქსიომებს აკმაყოფილებს. ამ შემთხვევაში R-ს ეწოდება G ჯგუფის ***სკალართა რგოლი.***

ვთქვათ, $\mathcal{L}_R$ და $\mathcal{M}_R$ ლინდონის ხარისხოვან R-ჯგუფთა და მიასნიკოვ-რემესლენიკოვის ხარისხოვან *MR*- ჯგუფთა კლასებია, ცხადია, რომ $\mathcal{L}_R \supseteq \mathcal{M}_R$.

შენიშვნა. განსაზღვრება 1.2-ის თანახმად, ყოველი აბელური *MR*-ჯგუფი R-მოდულია და პირიქით, მაგრამ, როგორც [9]-შია აღნიშნული, $\mathcal{L}_R$ კლასში არსებობენ აბელური R-ჯგუფები, რომლებიც არ არიან R-მოდულები. ამგვარად, $\mathcal{L}_R \neq \mathcal{M}_R$. შემდეგში R-ჯგუფების ქვეშ ვიგულისხმებთ *MR*- ჯგუფებს.

ხარისხოვან ჯგუფთა ბუნებრივი მაგალითების უმეტესი ნაწილი $\mathcal{M}_R$ კლასშია:

1) ნებისმიერი ჯგუფი $\mathbb{Z}$- ჯგუფია;
2) სრული აბელური ჯგუფი $\mathbb{Q}$- ჯგუფია;
3) ჯგუფი m პერიოდით $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$- ჯგუფია;
4) მოდული R რგოლის მიმართ აბელური R-ჯგუფია;

5) ნებისმიერი R-ხარისხოვანი ნილპოტენტური ჯგუფი ბინომიალური რგოლის მიმართ, რომელიც შემოტანილია ფ. ჰოლის მიერ [6]-ში, R-ჯგუფია;

6) ნებისმიერი პრო-p-ჯგუფი $\mathbb{Z}_{p^\infty}$-ჯგუფია მთელ p-ადიციურ რიცხვთა $\mathbb{Z}_{p^\infty}$- რგოლის მიმართ.

სიზუსტე და გრეხვა. ვთქვათ, G R-ჯგუფია, შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

$$x^R = \{x^\alpha |\ \alpha \in R\}, x \in G; x^R = \cup_{x \epsilon X} x^R, X \subseteq \mathrm{G}.$$

განსაზღვრება 1.3. ელემენტი $0 \neq \alpha \in R$ ***ზუსტად მოქმედებს*** G-ზე, თუ $\mathrm{G}^\alpha \neq \{e\}$. სკალართა R რგოლი ***ზუსტად*** მოქმედებს G-ზე (R ზუსტი სკალართა რგოლია), თუ R რგოლის ყოველი არანულოვანი ელემენტი ზუსტად მოქმედებს G-ზე.

განსაზღვრება 1.4. ელემენტი $g \in \mathrm{G}$ ***პერიოდულია,*** თუ $g^\alpha = e$ რომელიღაც $0 \neq \alpha \in R$, ამასთან მარჯვენა

$$O(g) = \{\ \alpha \epsilon R |\ g^\alpha = e\}$$

იდეალს R-ში ეწოდება g ***ელემენტის რიგითი იდეალი.*** ჯგუფი, რომელიც არ შეიცავს არანულოვან პერიოდულ ელემენტებს, ეწოდება ***გრეხვის გარეშე*** R- ჯგუფი.

არ არის რთული დასამტკიცებელი შემდეგი დებულებები:

1) ჯგუფი R-გრეხვის გარეშე ზუსტი R-ჯგუფია.

2) ვთქვათ, $\mathrm{e} \neq g \in \mathrm{G}$. თუ α შებრუნებადი ელემენტია R-ში, მაშინ $g^\alpha \neq e$.

ამ დებულებებიდან გამომდინარეობს:

3) თუ R ტანია, მაშინ ყოველი R-ჯგუფი ზუსტი R-ჯგუფია R გრეხვის გარეშე.

***R*- ქვეჯგუფები და იდეალები.** ვთქვათ, G R- ჯგუფია,

განსაზღვრება 1.5. H≤ G ქვეჯგუფს ეწოდება ***R- ქვეჯგუფი***, თუ $\mathrm{H}^R = \mathrm{H}$. ქვეჯგუფი H≤ G R-***წარმოქმნილია*** X⊆ G სიმრავლით, თუ H უმცირესი R-ქვეჯგუფია, რომელიც X-ს მოიცავს; ამ შემთხვევაში ვწერთ $\mathrm{H} = \langle \mathrm{X} \rangle_R$.

4) ვთქვათ, X ⊆ G და

$$\mathrm{X}_0 = \langle \mathrm{X} \rangle, \quad \mathrm{X}_{\mathrm{n}+1} = \langle {\mathrm{X}_\mathrm{n}}^R \rangle,$$

სადაც ⟨X⟩ ქვეჯგუფია, (მაგრამ არა R- ქვეჯგუფი!), რომელიც X სიმრავლითაა წარმოქმნილი. მაშინ

$$\langle \mathrm{X} \rangle = \cup_{n=0}^{\infty} \mathrm{X}_\mathrm{n}.$$

5) თუ $\mathrm{H} \trianglelefteq \mathrm{G}$, მაშინ $\langle \mathrm{H} \rangle_R \trianglelefteq \mathrm{G}$.

მართლაც, 4)-ის თანახმად,

$$\langle \mathrm{H} \rangle_R = \cup_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n,$$

სადაც $\mathrm{H}_{n+1} = \langle {\mathrm{H}_n}^R \rangle$. აქსიომა (3)-ის ძალით და ინდუქციით n-ის მიმართ ნებისმიერი $x \in \mathrm{G}$. გვექნება $x^{-1}\mathrm{H}_{n+1}x = \langle (x^{-1}\mathrm{H}_{n+1}x)^R \rangle = \langle {\mathrm{H}_n}^R \rangle$. ამგვარად,

$$x^{-1}\langle \mathrm{H} \rangle_R x = \cup_{n=0}^{\infty} x^{-1}\mathrm{H}_n x = \cup_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}_n = \langle \mathrm{H} \rangle_R.$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი H ნორმალური R-ქვეჯგუფისათვის G-დან G/H ფაქტორ-ჯგუფს არ გააჩნია R-ჯგუფის სტრუქტურა. ქვემოთ შემოტანილია G ჯგუფის H იდეალის ცნება, რომელიც ადებს ნორმალურ R-ქვეჯგუფს, H-ს იმ პირობებს, რომელთა შედეგად შესაძლებელია G/H-ზე R-სტრუქტურის ინდუცირება.

განსაზღვრება 1.6. ვთქვათ, $\mathrm{G} \in \mathcal{L}_R$. მაშინ H ნორმალურ R-ქვეჯგუფს ეწოდება ***$\mathcal{L}_R$-იდეალი,*** თუ $(gh)^\alpha \in g^\alpha \mathrm{H}$ ნებისმიერი $g \in \mathrm{G}, h \in \mathrm{H}, \alpha \in R$.

განსაზღვრება 1.7. ჰომომორფიზმს $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ ეწოდება ***R-ჰომომორფიზმი,*** თუ

$$(g^\alpha)^\varphi = (g^\varphi)^\alpha \quad \forall g \in G, \alpha \in R.$$

6) G, G' $\in \mathcal{L}_R$ ჯგუფებისათვის სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

(1) თუ $\varphi\colon G \to G'$ R-ჰომომორფიზმია, მაშინ $\ker \varphi$ $\mathcal{L}_R$-იდეალია G-ში;

(2) თუ H $\mathcal{L}_R$-იდეალია G-ში, მაშინ R-ის მოქმედება G-ზე ინდუცირებს R-ის მოქმედებას G/H-ზე წესით

$$(gH)^\alpha \in g^\alpha H \text{ , } g \in \mathrm{G}$$

რომლის შედეგად G/H უკვე $\mathcal{L}_R$- ჯგუფია.

$\mathcal{M}_R$-იდეალის განსაზღვრისთვის ჩვენ დაგვჭირდება ზოგიერთი წინასწარი ცნებები.

განსაზღვრება 1.8. თუ $g, h \in \mathrm{G}$, $\alpha \in R$, მაშინ ელემენტს

$$(g,h)_\alpha = h^{-\alpha} g^{-\alpha} (gh)^\alpha$$

ვუწოდოთ g და h ელემენტების ***α- კომუტატორი.***

გასაგებია, რომ $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha (g,h)_\alpha$,

$\mathrm{G} \in \mathcal{M}_R \Leftrightarrow ([g,h] = e \longrightarrow \forall \alpha\ (g,h)_\alpha = e)$.

უკანასკნელ ეკვივალენტობას მივყავართ $\mathcal{M}_R$-იდეალის განსაზღვრებამდე.

განსაზღვრება 1.9. ვთქვათ, $G \in \mathcal{L}_R$. ნორმალურ R- ქვეჯგუფს $H \trianglelefteq G$ ეწოდება $\boldsymbol{\mathcal{M}_R}$-***იდეალი***, თუ ნებისმიერი $g \in G, h \in G, \alpha \in R$ გვაქვს $(g,h)_\alpha \in H$.

წინადადება 1.1. ვთქვათ, $G \in \mathcal{L}_R$. მაშინ

1) თუ $H-\mathcal{M}_R$-იდეალია G-ში, მაშინ $H-\mathcal{L}_R$- იდეალია G-ში;
2) თუ $\varphi: G \to G'$ ჯგუფთა R-ჰომომორფიზმია $\mathcal{M}_R$- დან, მაშინ $\ker \varphi$ $\mathcal{M}_R$-იდეალია G-ში;
3) თუ $H-\mathcal{M}_R$-იდეალია G-ში, მაშინ $G/H \in \mathcal{M}_R$.

დამტკიცება:

1) ვთქვათ, $H-\mathcal{M}_R$-იდეალია G-ში, მაშინ თუ $g \in G, h \in H$, $\alpha \epsilon R$, გვექნება $(gh)^\alpha = g^\alpha h^\alpha (g,h)_\alpha$. რადგან $H \trianglelefteq G$, ამიტომ $[g,h] \in H$ და, მაშასადამე, $(g,h)_\alpha \in H$. ამგვარად,

$$h^\alpha (g,h)_\alpha \in H \text{ და} (gh)^\alpha \in g^\alpha H,$$

ე.ი. $H-\mathcal{L}_R$- იდეალია G-ში.

2) ვთქვათ, $\varphi: G \to G'$ ჯგუფთა R-ჰომომორფიზმია $\mathcal{M}_R$-დან, მაშინ $H = \ker \varphi$ ნორმალური R-ქვეჯგუფია G-ში. თუ $[g,h] \in H$, მაშინ

$$[g^\varphi, h^\varphi] = [g,h]^\varphi = e.$$

ამის გამო G' ჯგუფში ადგილი აქვს ტოლობას

$$(g^\varphi, h^\varphi)_\alpha = e.$$

ამგვარად,

$${(g,h)_\alpha}^\varphi = (g^\varphi, h^\varphi)_\alpha = e,$$

ე.ი. $(g,h)_\alpha \in H$ და, მაშასადამე, $H-\mathcal{M}_R$-იდეალია G-ში.

3) თუ $H-\mathcal{M}_R$-იდეალია G-ში, მაშინ პუნქტი 1)-ის ძალით, $H-\mathcal{L}_R$- იდეალია G-ში და, მაშასადამე, $G/H \in \mathcal{L}_R$. $\mathcal{M}_R$-იდეალის განსაზღვრების თანახმად გვაქვს:

$$[g,h] \in H \Rightarrow (g,h)_\alpha \in H \ \forall \alpha \in R,$$

ეს კი G/H-ში (4) აქსიომის შესრულების ტოლფასია. □

§2. ხარისხოვან MR- ჯგუფთა კატეგორია

ძირითადი ოპერაციები. ვთქვათ, R ნებისმიერი ასოციაციური რგოლია ერთეულით, მაშინ ***ხარისხოვან R-ჯგუფთა*** (***ლინდონის აზრით R-ჯგუფთა***) $\mathcal{M}_R(\mathcal{L}_R)$ ***კლასი კატეგორიაა, რომლის მორფიზმები*** ჯგუფთა ***R-ჰომომორფიზმებია.***

ქვემოთ იქნება ნაჩვენები, რომ $\mathcal{L}_R$ და $\mathcal{M}_R$ კლასები ჩაკეტილია პირდაპირი და დეკარტული ნამრავლების, პირდაპირი და შებრუნებული ზღვრების მიმართ.

ვთქვათ, $\mathrm{G}_i \in \mathcal{L}_R, i \in \mathrm{I}$. სიმბოლოებით $\overline{\prod}\mathrm{G}_i$ და $\prod\mathrm{G}_i$ აღვნიშნავთ, შესაბამისად G_i ჯგუფთა დეკარტულ და პირდაპირ ნამრავლებს. ვთქვათ, $g \in \overline{\prod}\mathrm{G}_i$, $g = (\dots, g_i, \dots), \alpha \in R$.

განვსაზღვროთ R-ის მოქმედება G-ზე კოორდინატულად

$$g^\alpha = (\dots, {g_i}^\alpha, \dots).$$

წინადადება 2.1. კლასები $\mathcal{L}_R$ და $\mathcal{M}_R$ ჩაკეტილია პირდაპირი და დეკარტული ნამრავლების მიმართ.

დამტკიცება: უშუალოდ მოწმდება, რომ თუ ყველა G_i ჯგუფი აკმაყოფილებს (1)-(4) აქსიომიდან ერთ-ერთს, მაშინ $\overline{\prod}\mathrm{G}_i$ და $\prod\mathrm{G}_i$ ჯგუფებიც აკმაყოფილებენ ამ აქსიომას. □

თუ პირდაპირ და შებრუნებულ სპექტრთა განსაზღვრებებში მხოლოდ R-ჰომომორფიზმებს განვიხილავთ, მაშინ არ არის ძნელი დასამტკიცებელი, რომ:

წინადადება 2.2. კლასები $\mathcal{L}_R$ და $\mathcal{M}_R$ ჩაკეტილია პირდაპირი და შებრუნებულ ზღვართა მიმართ.

მონოგრაფია [11]-ში დამტკიცებულია, რომ აბელურ ჯგუფთა კატეგორიაში ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლის, ჯგუფთა პირდაპირ და შებრუნებულ ზღვართა ოპერაციებს გააჩნიათ უნივერსალური თვისება. ანალოგიური თვისებები გააჩნიათ აგრეთვე შესაბამის ოპერაციებს ხარისხოვან MR- ჯგუფთა კატეგორიაში.

დამტკიცებისთვის საკმარისია გავიმეოროთ მსჯელობები [11] მონოგრაფიიდან. ამის გამო ჩვენ შემოვიფარგლებით შესაბამისი უნივერსალური თვისებების ჩამოყალიბებით.

წინადადება 2.3 (პირდაპირ ნამრავლთა უნივერსალური თვისება). ვთქვათ, $\varphi_i\colon \mathrm{G}_i \to \mathrm{H}$ − R-ჰომომორფიზმებია, $i \in \mathrm{I}$. მაშინ დიაგრამებში,

$$
\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \prod_i G_i \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad (i\epsilon \mathrm{I}),
$$

სადაც ρ_i ჩადგმებია და $[\varphi_i(\mathrm{G}_i), \varphi_j(\mathrm{G}_j)] = e,\ i \neq j$, პუნქტირული ისრის ადგილას შეიძლება დავსვათ ცალსახად განსაზღვრული ისეთი R- ჰომომორფიზმი ψ (არა დამოკიდებული i-ზე), რომ ყველა დიაგრამა გახდება კომუტაციური.

აღვნიშნოთ $\mathrm{G}_* = \varinjlim \mathrm{G}_i$ სიმბოლოთი პირდაპირი

$\mathbb{G} = \{\mathrm{G}_i\ (i\epsilon \mathrm{I}); \pi_i^j\}$ სპექტრის ზღვრული ჯგუფი.

წინადადება 2.4. ა) არსებობენ ისეთი R- ჰომომორფიზმები $\pi_i: \mathrm{G}_i \to \mathrm{G}_*\ (i\epsilon \mathrm{I})$, რომ ყველა

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_i \arrow[r, "\pi_i^j"] \arrow[d, "\pi_i"'] & \mathrm{G}_j \arrow[dl, "\pi_j"] \\
\mathrm{G}_* &
\end{tikzcd}
\qquad (i \leq j),
$$

დიაგრამა კომუტაციურია.

ბ) ჯგუფები $\mathrm{Im}\,\pi_i$ ერთობლიობაში ფარავენ G_*-ს.

გ) (პირდაპირ ზღვართა უნივერსალური თვისება). თუ მოცემულია R-ჰომომორფიზმები $\sigma_i: G_i \to \mathrm{H}$, რომელთათვისაც დიაგრამები

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_i \arrow[r, "\pi_i^j"] \arrow[d, "\sigma_i"'] & \mathrm{G}_j \arrow[dl, "\sigma_j"] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad (i \leq j),
$$

კომუტაციურია, მაშინ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ისეთი $\sigma: G_* \to H$ ჰომომორფიზმია, რომ ყველა

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\pi_i"'] & H \\ G_* \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd} \qquad (i \epsilon \mathrm{I}),$$

დიაგრამა კომუტაციურია.

აღვნიშნოთ $\mathrm{G}_* = \varprojlim \mathrm{G}_i$ შებრუნებული $\mathbb{G} = \{\mathrm{G}_i(i\epsilon \mathrm{I}), \pi_i^j\}$ სპექტრის ზღვრული ჯგუფი.

წინადადება 2.5. ა) არსებობენ ისეთი R- ჰომომორფიზმები $\pi_i: \mathrm{G}^* \to \mathrm{G}_i$ $(i \epsilon \mathrm{I})$, რომ ყველა

$$\begin{tikzcd} \mathrm{G}^* \arrow[d, "\pi_j"'] \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ \mathrm{G}_j \arrow[r, "\pi_i^j"'] & \mathrm{G}_i \end{tikzcd} \qquad (i \epsilon \mathrm{I}),$$

დიაგრამა კომუტაციურია.

ბ) **(შებრუნებულ ზღვართა უნივერსალური თვისება).** თუ H R-ჯგუფია და $\sigma_i: \mathrm{H} \to \mathrm{G}_i$ R- ჰომომორფიზმებია, რომელთათვისაც ყველა

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[d, "\sigma_j"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ \mathrm{G}_j \arrow[r, "\pi_i^j"'] & \mathrm{G}_i \end{tikzcd} \qquad (i \le j)$$

დიაგრამა კომუტაციურია, მაშინ არსებობს ერთი და მხოლოდ ერთი ისეთი $\sigma\colon \mathrm{H} \to \mathrm{G}^*$ ჰომომორფიზმი, რომლისთვისაც ყველა

$$\begin{tikzcd} \mathrm{H} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr] & \mathrm{G}^* \arrow[d, "\pi_i"] \\ & \mathrm{G}_i \end{tikzcd} \qquad (i \in \mathrm{I})$$

დიაგრამა კომუტაციურია.

ხარისხოვან ჯგუფთა ზეკატეგორიები და ქვეკატეგორიები. შემდეგში ტექნიკურად მოხერხებული იქნება ხარისხოვან MR-ჯგუფთა ზოგიერთი ზეკატეგორიისა და ქვეკატეგორიის განხილვა. მაგალითად, თუ MR- ჯგუფის განსაზღვრებაში უარს ვიტყვით (4) აქსიომაზე, მივიღებთ ლინდონის $\mathcal{L}_R \supset \mathcal{M}_R$ ზეკატეგორიას. თუ ამასთან ერთად უარს ვიტყვით (3) აქსიომაზე, მივიღებთ კიდევ უფრო დიდ ზეკატეგორიას $\mathcal{K}_R \supset \mathcal{L}_R$. მეორე მხრივ, შეიძლება ხარისხოვანი ჯგუფის ზოგადი ცნების (1)-(4) აქსიომებზე რაიმე სხვა აქსიომების დამატებით (მაგალითად, მისი ადაპტირება ამა თუ იმ სპეციალურ ჯგუფთა მრავალსახეობებისადმი). ამ გზით ჩნდება ჰოლის [6] ნილპოტენტურ MR-ჯგუფთა $\mathcal{H}_R$ კატეგორია. ბევრი აგება $\mathcal{M}_R$ და $\mathcal{L}_R$ კატეგორიებში მოხერხებულია ვაწარმოოთ ბიჯებით, თანდათან ,,ხარისხების განსაზღვრით“. ამას მივყავართ ნაწილობრივი R-ჯგუფის ცნებამდე.

განსაზღვრება 2.1. G ჯგუფს ვუწოდოთ ***ნაწილობრივი R-ჯგუფი,*** თუ ხარისხში აყვანა შესაძლებელია ზოგიერთი (g, α) წყვილისათვის, მაგრამ არა აუცილებლად ყველა წყვილისათვის, ამასთან სრულდება ხარისხოვანი ჯგუფის (1)-(4) აქსიომები, თუ მათში განსაზღვრულია ტოლობების ორივე ნაწილი.

მაგალითი. ვთქვათ, R ქვერგოლია S-ში, მაშინ ნებისმიერი R-ჯგუფი ნაწილობრივი S-ჯგუფია.

ნაწილობრივი MR- ჯგუფთა კლასი აღვნიშნოთ $\mathcal{P}_R$ სიმბოლოთი.

ვთქვათ, G, H $\epsilon\, \mathcal{P}_R$. ჯგუფთა φ: G → H ჰომომორფიზმს ვუწოდოთ ***ნაწილობრივი R-ჰომომორფიზმი***, თუ $(g^{\alpha})^{\varphi} = (g^{\varphi})^{\alpha}$ ყველა იმ (g, α) წყვილისათვის, რომელთათვისაც განსაზღვრულია g^{α} ელემენტი.

უშუალოდ მოწმდება, რომ $\mathcal{M}_R$-სთვის $\mathcal{P}_R$ ზეკატეგორიაა. ამასთან, ცხადია, რომ $\mathcal{P}_R$ ჩაკეტილია ქვეჯგუფების აღების მიმართ და შეიცავს ერთეულოვან ჯგუფს.

წინადადება 2.6. $\mathcal{P}_R$ კატეგორიაში არსებობს პირდაპირი, დეკარტული და თავისუფალი ნამრავლები, აგრეთვე პირდაპირი და შებრუნებული ზღვრები.

დამტკიცება. დამტკიცებისათვის საკმარისია არსებულ უნივერსალურ ობიექტებში ,,თანდათან“ ისე განვსაზღვროთ R რგოლის მოქმედება, რომ არსებული ჯგუფთა ჰომომორფიზმები გახდნენ ნაწილობრივი R-ჰომომორფიზმები. □

§3. ტენზორული გასრულების ფუნქტორი

ამ პარაგრაფში შეისწავლება ძირითადი ოპერაცია R-ჯგუფთა კლასში–***ტენზორული გასრულება.*** ის სკალართა რგოლის გაფართოების ცნებას მოდულებისათვის [12] ბუნებრივად აზოგადებს არაკომუტაციურ შემთხვევაში. ასეთი გაფართოების იდეები ნილპოტენტურ ჯგუფთა კლასში გადმოცემულია ნაშრომში [13]. ტენზორული გასრულება არსებითად გამოიყენება ხარისხოვან R-ჯგუფთა კატეგორიაში თავისუფალი კონსტრუქციების განსაზღვრისათვის R-თავისუფალი ჯგუფის ცნების ჩათვლით.

განსაზღვრება 3.1. ვთქვათ, G R-ჯგუფია, $\mu\colon R\to S$ – რგოლთა ჰომომორფიზმი, მაშინ

S- ჯგუფს $G^{S,\mu}$-ს ეწოდება R-ჯგუფის G-ს ***ტენზორული S-გასრულება***, თუ $G^{S,\mu}$ აკმაყოფილებს შემდეგ უნივერსალურ თვისებას:

1) არსებობს ისეთი R-ჰომომორფიზმი $\lambda\colon G\to G^{S,\mu}$, რომ $\lambda(G)$ S-წარმოქმნის $G^{S,\mu}$-ს, ე.ი.

$$\langle\lambda(G)\rangle_S = G^{S,\mu};$$

2) ნებისმიერი H S-ჯგუფისათვის და ნებისმიერი R-ჰომომორფიზმისათვის $\varphi\colon G\to H$, რომელიც μ-სთან შეთანხმებულია (ე.ი. $(g^{\alpha})^{\varphi}=(g^{\varphi})^{\mu(\alpha)}$), არსებობს S-ჰომომორფიზმი $\psi\colon G^{S,\mu}\to H$, რომელიც კომუტაციურს ხდის დიაგრამას:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\forall\varphi"'] & G^{S,\mu} \arrow[dl, "\exists\psi"] \\ H & \end{tikzcd} \qquad (\lambda\psi=\varphi)$$

თუ G აბელური R-ჯგუფია, მაშინ $G^{S,\mu}$ აგრეთვე აბელურია [9], ე.ი. S-მოდულია; ამის გარდა, $G^{S,\mu}$ აკმაყოფილებს იმავე უნივერსალურ თვისებას, რომელსაც R-მოდული G-ს S რგოლზე ტენზორული $G\underset{R}{\otimes} S$ ნამრავლია. მაშასადამე,

$$G^{S,\mu}\cong G\underset{R}{\otimes} S$$

არსებობა და ერთადერთობა. შემდეგში რგოლთა $\mu\colon R\to S$ ჰომომორფიზმი იქნება ფიქსირებული და ამის გამო $G^{S,\mu}$-ს ნაცვლად დამტკიცებებში დავწერთ G^{S}-ს.

თეორემა 3.1. ვთქვათ, G R-ჯგუფია, $\mu: R \to S -$ რგოლთა ჰომომორფიზმი, მაშინ არსებობს G^S ტენზორული გასრულება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\{\varphi_i \mid i \in \mathrm{I}\}$ μ-სთან შეთანხმებული ყველა იმ R-ჰომომორფიზმთა $\varphi_i: \mathrm{G} \to \mathrm{H}_i$ სიმრავლეა, სადაც H_i S- ჯგუფია და H_i S- წარმოიქმნება $\varphi_i(\mathrm{G})$ სიმრავლით. აღვნიშნოთ G_0-ით H_i, $i \in \mathrm{I}$, ჯგუფთა დეკარტული ნამრავლი $\mathrm{G}_0 = \overline{\prod}\mathrm{H}_i$. მაშინ G_0 S-ჯგუფია, ხოლო ასახვა $i: \mathrm{G} \to \mathrm{G}_0$, $i: g \mapsto (\dots, \varphi_i(g), \dots)$, R-ჰომომორფიზმია. განვიხილოთ G_0-ში $i(\mathrm{G})$ სიმრავლის მიერ წარმოქმნილი S-ჯგუფი $G^S = \langle i(\mathrm{G})\rangle_S$. ვაჩვენოთ, რომ G^S არის G-ს საძიებელი ტენზორული S-გასრულება. ამისათვის საკმარისია, დავამტკიცოთ, რომ G^S-ს გააჩნია შესაბამისი უნივერსალური თვისება. რადგან უნივერსალური თვისების პირველი მოთხოვნა G^S-ის აგებით სრულდება, ამიტომ შევამოწმოთ მეორე მოთხოვნის შესრულება. ვთქვათ, $\varphi: \mathrm{G} \to \mathrm{H}$, μ-სთან შეთანხმებული ნებისმიერი R-ჰომომორფიზმია R-ჯგუფი G-დან S-ჯგუფში H. ვთქვათ, $\mathrm{H}_0 = \langle\varphi(\mathrm{G})\rangle_S \le \mathrm{H}$, მაშინ $\mathrm{H}_0 \cong \mathrm{H}_i$ რომელიღაც $i \epsilon \mathrm{I}$ და $\varphi = \varphi_i$. ავაგოთ დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi = \varphi_i"'] & G^S \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{G}_0 \arrow[d, "\pi_i"] \\
\mathrm{H} & \mathrm{H}_0 \arrow[l, "\tau"] & \mathrm{H}_\mathrm{i} \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

სადაც ψ იზომორფიზმია H_i და H_0 ჯგუფებს შორის, რომელიც განსაზღვრავს φ_i-სა და φ-ს ეკვივალენტობას, ε და τ ჩადგმებია, $\pi_i : \overline{\prod}\,\mathrm{H}_i \to \mathrm{H}_i$ კანონიკური გეგმილებია და $\pi = \pi_i|_{G^S}$. მაშინ $\pi\varepsilon$ საძიებელ μ-სთან შეთანხმებული S- ჰომომორფიზმია, რომელიც მოცემულ დიაგრამას აქცევს კომუტაციურად. □

წინადადება 3.1. ვთქვათ, G R-ჯგუფია, $\mu: R \to S -$ რგოლთა ჰომომორფიზმი, მაშინ G-ს ტენზორული S- გასრულება S- იზომორფიზმამდე სიზუსტით ერთადერთია.

დამტკიცება. ვთქვათ, G_1 და G_2 μ-ს მიმართ G ნებისმიერი ორი S- გასრულებაა. მაშინ განსაზღვრით არსებობენ ψ_1-სა და ψ_2 S- იზომორფიზმები, რომლებიც კომუტაციურს ხდიან დიაგრამებს:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\lambda_1"] \arrow[d, "\lambda_2"'] & G_1 \arrow[dl, shift right, "\psi_1"'] \\ G_2 \arrow[ur, shift right, "\psi_2"'] & \end{tikzcd}$$

ვთქვათ, $f_1 = \psi_1\psi_2$ და $f_2 = \psi_2\psi_1$. რადგან f_i იგივურია $\lambda_i(\mathrm{G})$-ზე და $\lambda_i(\mathrm{G})$ S- წარმოქმნიან G_i-ს, ამიტომ $f = id$, ე.ი. ψ_1-სა და ψ_2 ურთიერთშებრუნებული S- ჰომომორფიზმებია. □

გამოყენებებში μ უფრო ხშირად იქნება რგოლთა ჩადგმა, მაგრამ ამ შემთხვევაშიც კი R-ჰომომორფიზმი $\lambda \colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}^S$ ყოველთვის არაა ჩადგმა. იზომორფული ჩადგმის ზოგიერთი შემთხვევა შესწავლილია ნაშრომში [13]. ქვემოთ მოყვანილი წინადადება აღწერს სიტუაციას, როცა λ ჩადგმაა.

განსაზღვრება 3.2. ვიტყვით, რომ R-ჯგუფი ***აპროქსიმირდება*** S-ჯგუფებით μ ჰომომორფიზმის მიმართ, თუ ნებისმიერი $e \neq g \in \mathrm{G}$ ელემენტისათვის არსებობს μ-სთან შეთანხმებული G-ს R-ჰომომორფიზმი φ_g რომელიღაც S-ჯგუფი H-ში ისეთი, რომ $\varphi_g \neq e$.

წინადადება 3.2. ვთქვათ, R-ჯგუფი ***აპროქსიმირდება*** G S-ჯგუფებით μ ჰომომორფიზმის მიმართ, მაშინ R-ჰომომორფიზმი $\lambda \colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}^S$ ჩადგმაა.

დამტკიცება. ვთქვათ, $e \neq g \in \mathrm{G}$ და $\varphi_g \colon \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ისეთი μ-სთან შეთანხმებული R-ჰომომორფიზმია, რომ $\varphi_g(g) \neq e$, სადაც $\mathrm{H} = \langle \varphi_g(G) \rangle_S$. მაშინ არსებობს ისეთი S- ჰომომორფიზმი $\psi \colon G^S \to \mathrm{H}$, რომ $\varphi_g = \psi\lambda$. მაშასადამე, $\lambda(g) \neq e$. □

კატეგორიათა თეორიის ენაზე გასრულების ზემოთ აღწერილი ოპერაცია გამოდის, როგორც ***ტენზორული გასრულების ფუნქტორი.***

ვთქვათ, $\mu \colon R \to S$ – რგოლთა ჰომომორფიზმია. ამ ჰომომორფიზმის ბაზაზე ავაგოთ $\theta^{S,\mu}$ (შემდეგ დავწერთ θ^S) ფუნქტორი, რომელიც დააკავშირებს ხარისხოვან R-ჯგუფთა $\mathcal{M}_R$

კატეგორიას ხარისხოვან ჯგუფთა $\mathcal{M}_S$ კატეგორიასთან. ობიექტებზე ასახვა $\theta^S\colon \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ განისაზღვრება ფორმულით $\theta^S(\mathrm{G}) = \mathrm{G}^S$, სადაც G R- ჯგუფია, ხოლო G^S- G ჯგუფის μ-ს მიმართ S- გასრულება.

განვსაზღვროთ θ^S ასახვა $\mathcal{M}_R$ კატეგორიის მორფიზმებზე. განვიხილოთ R-ჰომომორფიზმი $\psi\colon G \to \mathrm{H}$, სადაც G,H $\in \mathcal{M}_R$. რადგან $\varphi \circ \lambda_{\mathrm{H}}$ კომპოზიცია μ-სთან შეთანხმებული R-ჰომომორფიზმია G-დან H^S-ში, არსებობენ S-ჰომომორფიზმები ψ და φ^S, რომლებიც კომუტაციურს ხდის

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{G}}"'] \arrow[dr, "\psi"] & \mathrm{H} \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{H}}"] \\
G^S \arrow[r, "\varphi^S"'] & \mathrm{H}^S
\end{tikzcd}$$

დიაგრამას. ვთქვათ, $\theta^S(\varphi) = \varphi^S$.

წინადადება 3.3. ვთქვათ, $\mu\colon R\to S$ −რგოლთა ჰომომორფიზმია, მაშინ θ^S კოვარიანტული ფუნქტორია $\mathcal{M}_R$ კატეგორიიდან $\mathcal{M}_S$ კატეგორიაში.

დამტკიცება. მაგალითისათვის დავამტკიცოთ ფუნქტორის განსაზღვრების ერთ-ერთი აქსიომა. ვთქვათ, H = G და $\varphi = 1_{\mathrm{G}}$. ვაჩვენოთ, რომ ამ შემთხვევაში $(1_{\mathrm{G}})^S = 1_{\mathrm{G}^S}$.

მართლაც, ვთქვათ, $\lambda\colon \mathrm{G} \to G^S$ კანონიკური ჰომომორფიზმია, მაშინ $(1_{\mathrm{G}})^S$-ის შეზღუდვა $\lambda(\mathrm{G})$-ზე იგივურია, რადგან $G^S = \langle \lambda(\mathrm{G})\rangle_S$, ამიტომ $(1_{\mathrm{G}})^S$ იქნება იგივური ასახვა მთელ G^S-ზე ჯგუფზე.

ანალოგიურად მოწმდება ფუნქტორის განმსაზღვრელი დანარჩენი აქსიომები. □

ვთქვათ, R, S, T რგოლთა ჰომომორფიზმების მიმდევრობაა $R \xrightarrow{\mu_1} S \xrightarrow{\mu_2} T.$

აღვნიშნოთ $\mu = \mu_1\mu_2\colon R \to T$. ეს სამი ჰომომორფიზმი განსაზღვრავს ფუნქტორთა სამეულს $\Phi^{S,\mu_1}\colon \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$, $\Phi^{T,\mu_2}\colon \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_T$, $\Phi^{T,\mu}\colon \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_T$. ბუნებრივი გზით განისაზღვრება ფუნქტორთა $\Phi^{S,\mu_1} \circ \Phi^{T,\mu_2}$ კომპოზიცია. მოწმდება, რომ სამართლიანია:

წინადადება 3.4. ზემოთ შემოტანილ აღნიშვნებში

$$\Phi^{S,\mu_1} \circ \Phi^{T,\mu_2} = \Phi^{T,\mu}.$$

ვთქვათ, ახლა $\mu: R \to S$ −რგოლთა ჰომომორფიზმია და $\mathrm{Im}\mu = S_0$, მაშინ μ ჰომომორფიზმი კანონიკურად იშლება $\mu_1: R \to S_0$ ეპიმორფიზმისა და $\mu_1: S_0 \to S$ მონომორფიზმის ნამრავლად, წინადადება 11-ის ძალით, გვაქვს:

$$\Phi^{S,\mu} \circ \Phi^{S,\mu_1} = \Phi^{S,\mu_2}.$$

ამ შემთხვევაში ვგულისხმობთ ***ტენზორული გასრულების ფუნქტორის კანონიკურ დაშლას.*** ამის გამო ტენზორული გასრულების კონსტრუქციასთან დაკავშორებული თეორემების დამტკიცებები ბუნებრივად დაიყვანება ორი შემთხვევის გარჩევაზე:

ა) როცა μ რგოლთა ეპიმორფიზმია;

ბ) როცა μ რგოლთა ჩადგმაა.

§4. ტენზორული გასრულების კონსტრუქცია

ამ პარაგრაფში მოცემულია ტენზორული გასრულების კონსტრუქციის კონკრეტული ხერხი, რომელიც იყენებს კომბინატორული ჯგუფთა თეორიის ტექნიკას (იხ. [10]).

ა) $\mu\colon R\to S$ ეპიმორფიზმია. ამ შემთხვევაში $S=R/M$, სადაც $M=\ker\mu$. ვთქვათ, G ნებისმიერი R- ჯგუფია,

$$\mathrm{G}_0=\{g\epsilon\, G \mid \exists f\epsilon\, \mathrm{G}, \alpha\epsilon\, M, g=f^{\alpha}\}.$$

აღვნიშნოთ $\mathrm{G}_\mu = id(\mathrm{G}_0)$-ით G_0-ის მიერ წარმოქმნილი $\mathcal{M}_R$ იდეალი G-ში. მაშინ $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\,\mathrm{G}_\mu$ ფაქტორ-ჯგუფი S- ჯგუფია S-ის $\overline{\mathrm{G}}$- ზე ინდუცირებული მოქმედების შედეგად: $(g\mathrm{G}_\mu)^{\beta} = g^{\alpha}\mathrm{G}_\mu$, სადაც α ისეთი ელემენტია, რომ $\mu(\alpha)=\beta$. აღვნიშნოთ λ-თი G-ს მიერ $\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}/\,\mathrm{G}_\mu$ ფაქტორ- ჯგუფზე კანონიკური ჰომომორფიზმი $\lambda\colon \mathrm{G}\to \mathrm{G}/\,\mathrm{G}_\mu$.

წინადადება 4.1. ვთქვათ, $\mu\colon R\to S$ რგოლთა ეპიმორფიზმია. მაშინ $G^{S,\mu}\cong \mathrm{G}/\,\mathrm{G}_\mu$, სადაც S- ჯგუფი $\mathrm{G}/\,\mathrm{G}_\mu$ ზემოთაა განსაზღვრული.

დამტკიცება: ვთქვათ, $\varphi\colon \mathrm{G}\to \mathrm{H}$ ნებისმიერი μ-სთან შეთანხმებული R- ჰომომორფიზმია G-დან S- ჯგუფში H. მაშინ ცხადია, რომ $\ker\varphi \geq \mathrm{G}_\mu$ და ამიტომ არსებობს S- ჰომომორფიზმი $\psi\colon \mathrm{G}^S\to \mathrm{H}$, რომელიც კომუტაციურს ხდის

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{G} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d] & \mathrm{G}/\,\mathrm{G}_\mu \arrow[dl, dashed, "\exists\psi"] \\
\mathrm{H} &
\end{tikzcd}$$

დიაგრამას. □

მაგალითი. ვთქვათ, $R=\mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა რგოლია, $S=\mathbb{Z}_n$ მთელ რიცხვთა რგოლია მოდულით n, $\mu\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_n$ ბუნებრივი ჰომომორფიზმი. მაშინ $\mathrm{G}_\mu = \mathrm{G}^n$ ქვეჯგუფია G-ში, რომელიც წარმოქმნილია G-ს ელემენტების n-ური ხარისხებით. მაშინ $G^S\cong \mathrm{G}/\,\mathrm{G}^n$ მაქსიმალური ფაქტორ- ჯგუფია პერიოდით n.

ბ) ვთქვათ, G ნაწილობრივი R-ჯგუფია, μ: $R\to S$ რგოლთა ჩადგმა. აღვწეროთ კონსტრუქციულად G ჯგუფის ტენზორული S-გასრულება. ამისათვის წინასწარ ჩამოვაყალიბოთ ზოგიერთი ცნობილი ფაქტი გამაერთიანებელი ქვეჯგუფით თავისუფალი ნამრავლების შესახებ (იხ., მაგალითად, წიგნი [14]).

ვთქვათ, $\mathrm{H}_i \leq \mathrm{G}_i$ ჯგუფებია, $i = 1,2$. ვთქვათ, ამის გარდა, დაფიქსირებულია $\varphi: \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ ეპიმორფიზმი. G ჯგუფს ვუწოდოთ G_1 და G_2 ***ჯგუფების თავისუფალი ნამრავლი*** $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = \varphi(\mathrm{H}_1)$ გამაერთიანებელი ქვეჯგუფებით და აღვნიშნოთ G=$*$ ($\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \varphi$), თუ G- სთვის შესრულებულია შემდეგი უნივერსალური თვისება:

1) არსებობს ისეთი $\lambda_1: \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}$, $\lambda_2: \mathrm{G}_2 \to \mathrm{G}$ ჰომომორფიზმები, რომ G წარმოიქმნება $\lambda_1(\mathrm{G}_1)$ და $\lambda_2(\mathrm{G}_2)$-თი;

2) ნებისმიერი H ჯგუფისათვის და $\psi_1: \mathrm{G}_1 \to \mathrm{H}$, $\psi_2: \mathrm{G}_2 \to \mathrm{H}$ ჰომომორფიზმებისათვის, რომლებიც შეთანხმებულია φ-თან, არსებობს ისეთი $\theta: \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ჰომომორფიზმი, რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{G} \arrow[dd, dashed] & \\
\mathrm{G}_1 \arrow[ur, "\exists\lambda_1"] \arrow[dr, "\forall\psi_1"'] & & \mathrm{G}_2 \arrow[ul, "\exists\lambda_2"'] \arrow[dl, "\forall\psi_2"] \\
& \mathrm{H} &
\end{tikzcd} \qquad (\lambda_1\theta = \psi_1,\ \lambda_2\theta = \psi_2)$$

თუ G=$\langle X_1 | R_1 \rangle$, G=$\langle X_2 | R_2 \rangle$ ამ ჯგუფთა მოცემაა წარმომქმნელი ელემენტებით და განმსაზღვრელი თანაფარდობებით, მაშინ ადვილი დასამტკიცებელია, რომ

$$\mathrm{G}=\langle X_1 \cup X_2 | R_1 \cup R_2 \cup S \rangle,$$

$S = \{\varphi(\mathrm{h}_1) = \mathrm{h}_2 |$ ყველა $\mathrm{h}_1 \epsilon \mathrm{H}_1\}$ G- ს მოცემაა წარმომქმნელი ელემენტებით და განმსაზღვრელი თანაფარდობებით.

შევუდგეთ G^S ტენზორული გასრულების აგებას. გავაკეთოთ ეს ბიჯებით.

a) **ელემენტარული ბიჯის აღწერა.** ვთქვათ, M ნაწილობრივი R-ჯგუფი G-ს მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფია. მაშასადამე, M ნაწილობრივი R- მოდულია და ამიტომ, ნაწილობრივი S- მოდულიც.

აღვნიშნოთ

$$\mathrm{M}^{S} \equiv \mathrm{M} \underset{S}{\otimes} \mathrm{S}$$

მაშინ M^S $\mathcal{S}$- მოდულია და

$$i_M: M \to M^S$$

კანონიკური ასახვა ნაწილობრივი R- ჰომომორფიზმია.

აღვნიშნოთ

$$\mathrm{G}' = * \, (\mathrm{G}, M^S, M, i_M(M), i_M).$$

$g \in \mathrm{G}$ ელემენტის $\lambda_1(g)$ ანასახისათვის ($\lambda_1: \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$) $\alpha \in \mathrm{S}$ ხარისხში აყვანა G' ჯგუფში განვსაზღვროთ ფორმულით

$$\lambda_1(g)^{\alpha} = \lambda_1(g^{\alpha})$$

იმ α-ებისათვის $\mathcal{S}$-დან, რომელთათვისაც g^{α} განსაზღვრულია G ჯგუფში. ანალოგიურად განისაზღვრება $\mathcal{S}$-ის ნაწილობრივი მოქმედება M^S ჯგუფის $\lambda_2(M^S)$ ანასახზე G' ჯგუფში ($\lambda_2: M^S \to \mathrm{G}'$). ადვილი გასაგებია, რომ ასეთნაირად განსაზღვრული მოქმედება კორექტულია და G' ნაწილობრივი ჯგუფია $\mathcal{PK}_S$ კლასიდან (შესრულებულია (1), (2) აქსიომები). ვთქვათ, N=$id_{\mathcal{M}}(1)$, ე.ი. უმცირესი $\mathcal{M}$- იდეალი G'-ში, რომელიც $\mathrm{G}'/\,\mathrm{N}$ ფაქტორ- ჯგუფს გადააქცევს ნაწილობრივ S-ჯგუფად. ვთქვათ, $\mathrm{G}^1 = \mathrm{G}'/\,\mathrm{N}$, $\eta: \mathrm{G}' \to \mathrm{G}'/\,\mathrm{N}$ კანონიკური ჰომომორფიზმებია და i^1- ით აღვნიშნოთ ნაწილობრივი $\mathrm{G} \xrightarrow{i^1} \mathrm{G}^1$ R- ჰომომორფიზმი, რომელიც $\lambda_1: \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$, $\eta: \mathrm{G}' \to \mathrm{G}'/\,\mathrm{N} = \mathrm{G}^1$ ასახვებითაა ინდუცირებული. ვამბობთ, რომ G^1 ***ჯგუფი მიღებულია G-დან M ქვეჯგუფის საშუალებით $\mathcal{M}$-ელემენტარული ბიჯის შედეგად.*** ანალოგიურად შეიძლება განისაზღვროს ელემენტარული $\mathcal{L}$- ბიჯის ცნება $\mathcal{PL}_S$ კატეგორიაში.

ლემა *(ჰომომორფიზმის გაგრძელების შესახებ).* ვთქვათ, φ R-ჯგუფი G-ს ნაწილობრივი R- ჰომომორფიზმია $\mathcal{S}$-ჯგუფი H-ში. მაშინ არსებობს ნაწილობრივი $\mathcal{S}$- ჰომომორფიზმი $\psi: G^1 \to \mathrm{H}$ ისეთი, რომ კომუტაციურია დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i^1 = \lambda_1\eta"] \arrow[d] & G^1 \arrow[dl, dashed, "\exists\psi"] \\ H & \end{tikzcd}$$

დამტკიცება. აგების თანახმად G’ ჯგუფი წარმოქმნილია λ_1(G) და $\eta(M^S)$ ქვეჯგუფებით. ვთქვათ, i^1(G)- სთვის, $g \in$ G, $\psi\,(i^1(\mathrm{G})) = \varphi(g)$. შეზღუდვა φ-ს M-ზე ინდუცირებს $M \to$ H ჰომომორფიზმს და, მაშასადამე, $\mathcal{S}$-ჰომომორფიზმს

$$\varphi_M : M^S \to \mathrm{H},$$

რომელიც შეთანხმებულია

$$i_M : M \to M^S$$

ჰომომორფიზმთან.

გაერთიანებული ქვეჯგუფით თავისუფალ ნამრავლთა უნივერსალური თვისება იძლევა $\psi_0 : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{H}$ ჰომომორფიზმს, რომელიც φ და φ_{M} ასახვების გაგრძელებაა. რადგან H $\mathcal{S}$- ჯგუფია, ამიტომ $\mathcal{M}$- იდეალი N მოთავსებულია ψ_0-ის ბირთვში. ამის გამო ψ_0 ინდუცირებს საძიებელ $\psi : \mathrm{G}^1 \to \mathrm{H}$ ნაწილობრივ $\mathcal{S}$- ჰომომორფიზმს.

G^{s}-ის აგება ტრანსფინიტური ინდუქციით. პირველი ელემენტარული ბიჯის შედეგი მდგომარეობს იმაში, რომ ჩვენ შეგვიძლია M მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფის ელემენტების ანასახების ხარისხში აყვანა S რგოლიდან. არაკომუტაციურ შემთხვევაში ბუნებრივია ეს აგება გავაგრძელოთ და შევასრულოთ მეორე ბიჯი, მესამე ბიჯი,.., k-ური ბიჯი,..., $\mathrm{k} \in \mathbb{N}$, და მივიღოთ G^{k} ჯგუფი და ნაწილობრივი $\mathcal{S}$-ჰომომორფიზმები $i^k : \mathrm{G}^{k-1} \to \mathrm{G}^{\mathrm{k}}$. უკანასკნელი ჰომომორფიზმები იძლევა საშუალებას ინდექსთა ნებისმიერი (r, s), $r < s$, წყვილისათვის განისაზღვროს ნაწილობრივი $\mathcal{S}$-ჰომომორფიზმი

$$\pi_r^s : \mathrm{G}^{\mathrm{r}} \to \mathrm{G}^{\mathrm{s}}.$$

სისტემა

$$\mathbb{G} = \{\mathrm{G}^{\mathrm{k}}, \mathrm{k}\epsilon\mathbb{N}, \pi_r^s\ (r < s)\}$$

პირდაპირი სპექტრია. კონსტრუქციაში ω-ბიჯს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად: G^{ω} პირდაპირი $\mathbb{G}$ სპექტრის ზღვრული ჯგუფია, π_k^{ω} არის G^{k} ჯგუფის გეგმილი G^{ω}-ში. ჰომომორფიზმის გაგრძელების შესახებ ლემა ბუნებრივი სახით მტკიცდება G^{ω} ჯგუფისთვისაც (ამისათვის საკმარისია განვიხილოთ პირდაპირი ზღვრის უნივერსალური თვისება).

თუ G^{ω} არ არის $\mathcal{S}$- ჯგუფი, მაშინ აგებისათვის ვდგამთ შემდეგ ნაბიჯებს: $\mathrm{G}^{\omega+1} = (\mathrm{G}^{\omega})^1$, $\mathrm{G}^{\omega+2} = (\mathrm{G}^{\omega+1})^1, \mathrm{G}^{\omega+3} = (\mathrm{G}^{\omega+2})^1, \ldots$.პროცედურა ყოველთვის შეიძლება ისე წარიმართოს, რომ იარსებებს ისეთი ორდინალი $\mathbf{v}$, რომლისთვისაც $\mathrm{G}^{\mathbf{v}}$ უკვე იქნება $\mathcal{S}$-ჯგუფი. რადგან ყოველ ნაბიჯზე სრულდება $\mathrm{G}^{\mathcal{S},\mu}$ ჯგუფის განმსაზღვრელი 1) და 2) თვისებები, ამიტომ $\mathrm{G}^{\mathbf{v}}$ ტენზორული $\mathcal{S}$- გასრულებაა G-სთვის.

თუ §3-დან ტენზორული გასრულების განსაზღვრებაში $\lambda\colon \mathrm{G} \to \mathrm{G}^{\mathcal{S}}$ და $\varphi\colon \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ ასახვებში $\mathcal{R}$-ჰომომორფიზმის პირობას შევცვლით ნაწილობრივი $\mathcal{R}$-ჰომომორფიზმის პირობით, მივიღებთ ნაწილობრივი $\mathcal{R}$-ჯგუფის ტენზორული გასრულების განსაზღვრებას. ზემოთ მოყვანილი მსჯელობები ამტკიცებენ ასეთი გასრულების არსებობასა და ერთადერთობას.

§5. ტენზორული გასრულების სიზუსტე

ნაშრომის ბოლომდე ვგულისხმობთ, რომ R რგოლი ქვერგოლის სახით შეიცავას მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ რგოლს.

განსაზღვრება 5.1. ვიტყვით, რომ ჯგუფი $\mathrm{G} \in \mathcal{P}_R$ ***ზუსტია*** R რგოლის მიმართ, თუ კანონიკური ასახვა $\lambda : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^R$ ჩადგმაა. ჯგუფი G ***ზუსტია***, თუ ის ზუსტია $\mathbb{Z}$ რგოლის შემცველი ნებისმიერი R რგოლის მიმართ.

დავამტკიცოთ ზოგიერთი სასარგებლო ფაქტი ზუსტი ჯგუფების შესახებ.

წინადადება 5.1. ვთქვათ, $\mathrm{G}=\prod_i \mathrm{G}_i$ არის G_i ჯგუფთა პირდაპირი ნამრავლი. ჯგუფი G მაშინ და მხოლოდ მაშინაა ზუსტი R-ის მიმართ, როცა ყოველი G_i ზუსტია R-ის მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ, ყველა ჯგუფი G_i, $i\epsilon \mathrm{I}$, ზუსტია R რგოლის მიმართ, ე.ი. $\lambda\colon \mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{G}_i^R$ კანონიკური ასახვები ჩადგმებია. რადგან ტენზორული გასრულების ფუნქტორი გადანაცვლებადია პირდაპირი ნამრავლის ოპერაციასთან (იხ. [6], თეორემა 1), ამიტომ $\mathrm{G}^R=\prod_i \mathrm{G}_i^R$ და კანონიკური ასახვა $\lambda\colon \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^R$ არის λ_i-ების პირდაპირი ნამრავლი ($\lambda = \prod \lambda_i$). აქედან გამომდინარეობს, რომ λ ჩადგმაა. სამართლიანია შებრუნებულიც: თუ λ ჩადგმაა, მაშინ ყველა λ_i აგრეთვე ჩადგმებია და, მაშასადამე, G_i ჯგუფები ზუსტია R რგოლის მიმართ. □

წინადადება 5.2. ვთქვათ, G ნაწილობრივი R-ჯგუფია. მაშინ G ზუსტია R რგოლის მიმართ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყველა მისი სასრულად წარმოქმნილი ქვეჯგუფი ნაწილობრივ R- ჯგუფთა კატეგორიაში ზუსტია R რგოლის მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ, G ჯგუფის ყველა სასრულად წამოქმნილი ქვეჯგუფების სიმრავლეა G_i, $i\epsilon \mathrm{I}$ და $\lambda_i\colon \mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{G}_i^R$- კანონიკური ასახვებია. მაშინ ჯგუფი $\mathrm{G}=\varinjlim \mathrm{G}_i$ და [6]- დან თეორემა 2-ის ძალით $\mathrm{G}^R = \varinjlim_{i\epsilon \mathrm{I}} \mathrm{G}_i^R$. კანონიკური ასახვა $\lambda\colon \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^{\mathrm{R}}$ იქნება $\lambda = \varinjlim_{i\epsilon \mathrm{I}} \lambda_i$. აშკარაა, რომ λ იქნება ჩადგმა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ყოველი λ_i ჩადგმაა. □

წინადადება 5.3. ვთქვათ,

$$e \longrightarrow \mathrm{N} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{G} \xrightarrow{\psi} \mathrm{G/N} \longrightarrow e$$

ნაწილობრივ R- ჯგუფთა მოკლე ზუსტი მიმდევრობაა. მაშინ ჯგუფი G ზუსტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა კანონიკური ასახვა $\lambda_{\mathrm{N}}\colon \mathrm{N} \longrightarrow \mathrm{N}^{R}$ ჩადგმაა და G/N ზუსტი ჯგუფია.

დამტკიცება. დიაგრამა

$$\begin{tikzcd}
e \arrow[r] & \mathrm{N} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{N}}"'] & \mathrm{G} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{G}}"'] & \mathrm{G/N} \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{\mathrm{G/N}}"'] & e \\
e \arrow[r] & \mathrm{N}^{\mathrm{R}} \arrow[r, "\varphi^{\mathrm{R}}"] & \mathrm{G}^{\mathrm{R}} \arrow[r, "\psi^{\mathrm{R}}"] & (\mathrm{G/N})^{\mathrm{R}} \arrow[r] & e
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

კომუტაციურია, რაც φ^{R} და ψ^{R}-ის განსაზღვრებებიდან და ტენზორული გასრულების თვისებებიდან გამომდინარეობს. ვთქვათ, $g\epsilon\mathrm{G}$ და ვივარაუდოთ, რომ $\lambda_{\mathrm{G}}(g) = e$. რადგან დიაგრამა $(*)$ კომუტაციურია და $\lambda_{\mathrm{G/N}}$ ჩადგმაა, ამიტომ $\psi(g) = e$, ე.ი. $g \in \mathrm{N}$. რადგან λ_{N}-იც პირობის ძალით ჩადგმაა, გვექნება $g = e$ და, მაშასადამე, λ_{G} ჩადგმაა. □

რ. ლინდონმა სტატიაში [7] დაამტკიცა, რომ თუ G თავისუფალი ჯგუფია, R=$\mathbb{Q}$ ან R=$\mathbb{Z}[x_{1,\dots,}x_n]$ მთელრიცხოვან მრავალწევრთა რგოლია, მაშინ G ზუსტი ჯგუფია.

გ. ბაუმსალგის [3] ნაშრომში დამტკიცებულია, რომ თუ G თავისუფალი ჯგუფია და R რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ ველია, მაშინ G ზუსტი ჯგუფია. ქვემოთ ნაჩვენებია სიზუსტე ჯგუფთა უფრო ფართო კლასისათვის და რგოლთა ფართო კლასებისათვის. აქ კი მოვიყვანოთ არაზუსტი ჯგუფების მაგალითები.

მაგალითი 5.1. ვთქვათ, G მარტივი ჯგუფია, რომელიც შეიცავს არაერთეულვან სასრული რიგის მქონე ელემენტებს. მაშინ G არაზუსტია რაციონალურ რიცხვთა $\mathbb{Q}$ ველზე. უფრო მეტიც $\mathrm{G}^{\mathbb{Q}} = e$. მართლაც, რადგან ნებისმიერ $\mathbb{Q}$-ჯგუფში არაა სასრული რიგის ელემენტები, G ვერ იქნება ქვეჯგუფი $\mathrm{G}^{\mathbb{Q}}$-ში. მაგრამ ასეთ შემთხვევაში $\lambda\colon \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^{\mathbb{Q}}$ ჰომომორფიზმს აქვს არატრივიალური ბირთვი და G-ს მარტივობა მოასწავებს λ(G)= e, ხოლო λ(G) წარმოქმნის $\mathrm{G}^{\mathbb{Q}}$ -ს. ამიტომ $\mathrm{G}^{\mathbb{Q}} = e$.

მაგალითი 5.2. ვთქვათ, G ჯგუფია გრეხვის გარეშე ფესვების არაცალსახა ამოღებით. ასეთ შემთხვევაში $\mathrm{G}^{\mathbb{Q}}$ ჯგუფთა ფესვების ცალსახად ამოღებით. ეს ადვილად გამომდინარეობს [9]-ის წინადადება 3-დან. აშკარაა, რომ ასეთუ ჯგუფი G არ შეიძლება იზომორფულად ჩაიდგას $\mathrm{G}^{\mathbb{Q}}$- ში და, მაშასადამე, ის არაზუსტია.

ჯგუფთა $\mathcal{P}_R$ კატეგორიაში განვიხილოთ $\mathcal{P}_R^o$ ჯგუფთა კლასი. განსაზღვრებით G ჯგუფი $\mathcal{P}_R$-დან ეკუთვნის $\mathcal{P}_R^o$-ს, თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

1) ნებისმიერი მაქსიმალური აბელური M ქვეჯგუფისათვის G-დან და ნებისმიერი $x \notin M$ თანაკვეთა $M \cap M^x = e$;

2) კანონიკური ჰომომორფიზმი $j: M \to M \underset{R}{\otimes} R$ ჩადგმაა.

დავამტკიცოთ $\mathcal{P}_R^o$ კლასის ჯგუფთა ზოგიერთი თვისებები და მოვიყვანოთ მაგალითები.

წინადადება 5.4. ვთქვათ, $G \in \mathcal{P}_R^o$. მაშინ:

(a) თუ M_1 და M_2 სხვადასხვა მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფებია G- დან, მაშინ

$M_1 \cap M_2 = e$;

(b) თუ G გრეხვის გარეშეა, მაშინ G-ში ცალსახაა ფესვის ამოღების ოპერაცია;

(c) კომუტაციურობის მიმართებაა არაერთეულოვან ელემენტებზე ეკვივალენტობის მიმართებაა;

(d) ნებისმიერი არანულოვანი ელემენტის ცენტრალიზატორი მაქსიმალური აბელური ნორმალური ქვეჯგუფია;

(e) ვთქვათ, G გრეხვის გარეშეა და $x^r = y^s$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $[x, y] = e$;

(f) თუ ელემენტები x და y მაქსიმალური აბელური M ქვეჯგუფიდანაა და x და y შეუღლებულია G-ში, მაშინ $x = y$.

დამტკიცება. (a) მართლაც, ვთქვათ $x \in M_1 \cap M_2$. დავუშვათ, რომ $x \neq e$ და ავარჩიოთ ელემენტი $y \in M_2/M_1$. რადგან $x, y \in M_2$ და M_2 აბელური ჯგუფია, ამიტომ $x \in M_1 \cap M_1^y$, რაც $\mathcal{P}_R^o$ კლასის განსაზღვრას ეწინააღმდეგება.

(b) ვთქვათ, $x^m = y^m$. თუ x კომუტირებს y ელემენტთან, მაშინ $(xy^{-1})^m = x^m y^{-m} = e$. რადგან G-ში არაა გრეხვა, ამიტომ აქედან გამომდინარეობს, რომ $x = y$. თუ x არ კომუტირებს y-თან, მაშინ M-ით აღვნიშნოთ y-ის შემცველი რომელიმე მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფი. გვექნება $x \in M$ და $M \cap M^x \ni y^m \neq e$. წინააღმდეგობა.

(c) დავუშვათ, რომ მოცემულია სამი არაერთეულოვანი ელემენტი x, y, z და, ვთქვათ, კომუტატორი $[x, y] = [x, z] = e$. ვაჩვენოთ, რომ აქედან $[y, z] = e$. თუ ეს ასე არაა, მაშინ განვიხილოთ მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფები $M_1 \ni x, y$ და $M_2 \ni y, z$. მაშინ $M_1 \cap M_2 \ni x$, რაც (a) პუნქტს ეწინააღმდეგება.

(d) დამტკიცება გამომდინარეობს (c)-დან.

(e) ვთქვათ, $x^r = y^s$, $x \neq e$, $y \neq e$ და ვივარაუდოთ, რომ კომუტატორი $[x, y] \neq e$. ვთქვათ, x ელემენტის შემცველი მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფია M; მაშინ $y \notin M$. $\mathcal{P}_R^o$ კლასის ჯგუფის განსაზღვრებიდან $M \cap M^y = e$. მეორე მხრივ, $y^{-1}x^r y = y^{-1}y^s y = y^s = x^r$, ამიტომ $e \neq x^r \epsilon \mathrm{M} \cap \mathrm{M}^y$

(f) თუ $x = y^f$, მაშინ $M \cap M^f \neq e$. აქედან გამომდინარეობს, რომ $f \in M$ და ამიტომ

$x = y$. □

მივუთითოთ ჯგუფების მაგალითები $\mathcal{P}_R^o$ კლასიდან.

I. ნებისმიერი $R \supseteq \mathbb{Z}$ რგოლისათვის თავისუფალი ჯგუფები ნაწილობრივი R-ჯგუფებია. აშკარაა, რომ ეს ჯგუფები ეკუთვნიან $\mathcal{P}_R^o$ კლასს.

II. განვაზოგადოთ წინა მაგალითი და განვიხილოთ ჯგუფთა კლასი შემდეგი თვისებებით:

1) ჯგუფი G გრეხვის გარეშეა;
2) ნებისმიერი არაერთეულოვანი ელემენტის ცენტრალიზატორი უსასრულო ციკლური ქვეჯგუფია.

მაშინ G ეკუთვნის $\mathcal{P}_R^o$ კლასს. მართლაც, მაქსიმალური აბელური M ქვეჯგუფი ასეთ ჯგუფში უსასრულო ციკლურია.

ვთქვათ, ელემენტი $x \notin M$. მაშინ თუ $M \cap M^x = e$, $M = \langle y \rangle$ და სათანადო მთელი r და s- სთვის $x^{-1}yx = z$, მაშინ $z^s = y^r$, საიდანაც წინადადება 5.4-ის (e) პუნქტიდან გამომდინარეობს, რომ z კომუტირებს y-თან და, მაშასადამე, $x^{-1}yx = y^p$. თუ $|p|>1$, მაშინ ქვეჯგუფი $\langle x, y \rangle$ შეიცავს p-ურ რაციონალურ წილადთა ქვეჯგუფს. უკანასკნელი ჯგუფი არაა ციკლური ქვეჯგუფი, რაც 2) თვისებას ეწინააღმდეგება. თუ $p = 1$, მაშინ x კომუტირებს y-თან- წინააღმდეგობა. ბოლოს, თუ $x^{-1}yx = y^{-1}$, მაშინ $x^{-2}yx^2 = y$- კვლავ წინადადება 5.4-ის (e) პუნქტთან წინააღმდეგობა.

წინადადება 5.5. $\mathcal{P}_R^0$ კლასის ჯგუფთა თავისუფალი ნამრავლი კვლავ $\mathcal{P}_R^0$ კლასს ეკუთვნის.

დამტკიცება. $\mathcal{P}_R^0$ კლასის G_i, $i \in \mathrm{I}$, ჯგუფთა თავისუფალი ნამრავლები $\mathrm{G} = {}_{i\in\mathrm{I}}^{*}\,\mathrm{G}_i$ თვითონ ჯგუფებია ამ კლასიდან. კუროშის თეორემის თანახმად თავისუფალი ნამრავლის ქვეჯგუფების შესახებ (იხ. [14], შედეგი 4.9.1) არსებობს ორი შესაძლებლობა:

1) მაქსიმალური აბელური ქვეჯგუფი M იმყოფება ქვეჯგუფში, რომელიც შეუღლებულია ერთ-ერთ თანამამრავლთან, ე.ი. G_i^y, $y \in \mathrm{G}$, სახის ქვეჯგუფში;

2) M-მაქსიმალური ციკლური ქვეჯგუფია, წარმოქმნილი ელემენტით, რომლის რედუცირებული სიგრძე ≥ 2.

პირველ შემთხვევაში, თუ $x \notin M$, მაგრამ $x \in \mathrm{G}_i^y$, მაშინ $M \cap M^x = e$ გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\mathrm{G}_i \in \mathcal{P}_R^0$. თუ $x \notin \mathrm{G}_i^y$, მაშინ $M^x \cap \mathrm{G}_i^y = e$ და ამიტომ $M \cap M^x = e$.

მეორე შემთხვევაში, თუ $x \notin M$, მაშინ $M \cap M^x = e$, რადგან ერთი და იგივე ელემენტის სხვადასხვა ხარისხები, რომლის რედუცირებული ≥ 2, არაა ერთი მეორის შეუღლებული (იხ.[14], თეორემა 4.6). □

თეორემა 5.1 (ძირითადი, [15]). ვთქვათ, $\mathbb{Z}$ ქვერგოლია R-რგოლში და $\mathrm{G} \in \mathcal{P}_R^0$, ამასთან G-ში და R^+-ში (რგოლის ადიციური ჯგუფი) არაა მეორე რიგის ელემენტები. მაშინ ჯგუფი G ზუსტია, ე.ი. კანონიკური ასახვა $\lambda: \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}^{\mathrm{R}}$ ჩადგმაა.

შენიშვნა 5.1. ძირითადი თეორემა იძლევა ტენზორული R-გასრულების სიზუსტის საკმარის პირობას. აღვნიშნოთ, რომ $\mathcal{P}_R^0$ კლასის განმსაზღვრელი 1) პირობა აგრეთვე აუცილებელიცაა. $\mathcal{P}_R^0$ კლასში შედის ყველა თავისუფალი ჯგუფი. ის ჩაკეტილია პირდაპირი ზღვრების, თავისუფალი ნამრავლებისა და ყველა სპეციალური სახის გაფართოებების მიმართ.

შენიშვნა 5.2. განვსაზღვროთ $\mathcal{P}_R^*$ ჯგუფთა კლასი უფრო ფართო ვიდრე $\mathcal{P}_R^0$ კლასი. ვიტყვითმმ რომ ჯგუფი $\mathrm{G} \in \mathcal{P}_R^*$, თუ მისი ნებისმიერი მაქსიმალური M ქვეჯგუფისათვის შესრულებულია პირობა: M ან R-მოდულია, ან M აკმაყოფილებს $\mathcal{P}_R^0$ კლასის განმსაზღვრელ 1) და 2) პირობებს.

§6. გამოყენებები *MR*- ჯგუფთა თავისუფალ კონსტრუქციებში

რადგან ნებისმიერი $\mathbb{Z}$ ჯგუფია, შეიძლება ავაგოთ მისი R- გაფართოება ყოველი ქვერგოლის სახით $\mathbb{Z}$-ის შემცველი ასოციაციური R რგოლისათვის. ამ პირობებში ჩამოვაყალიბოთ $\mathrm{F_R(X)}$ თავისუფალი R-ჯგუფის ცნება, სადაც $\mathrm{X}=\{x_1, x_2,\ldots\}$ სიმბოლოთა ნებისმიერი სიმრავლეა.

განსაზღვრება 6.1. $\mathrm{F_R(X)}$ ხარისხოვან R-ჯგუფს წარმომქმნელთა X სიმრავლით ეწოდება ***თავისუფალი R- ჯგუფი X ბაზისით,*** თუ ყოველი R- ჯგუფი G-სთვის ნებისმიერი $\varphi_0\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{G}$ ასახვა გრძელდება $\varphi\colon \mathrm{F_R(X)} \longrightarrow \mathrm{G}$ R-ჰომომორფიზმამდე. X სიმრავლეს ეწოდება ***თავისუფალ R- წარმომქმნელთა სიმრავლე***. $|\mathrm{X}|$ სიმძლავრეს ეწოდება $\mathrm{F_R(X)}$ ჯგუფის ***რანგი***.

თეორემა 6.1 ([10]). ნებისმიერი X და R-სთვის თავისუფალი R- ჯგუფი $\mathrm{F_R(X)}$ არსებობს და ერთადერთია R-იზომორფიზმამდე სიზუსტით.

დამტკიცება: ვთქვათ, F(X) თავისუფალი ჯგუფია ჩვეულებრივი აზრით. მაშინ მისი R-გასრულება თავისუფალი R-ჯგუფია ბაზისით X. მართლაც, ვთქვათ $\varphi_0\colon \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{G}$ ნებისმიერი ასახვაა X-დან R-ჯგუფი G-ში:

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{X} \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & \mathrm{F(X)} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \mathrm{F(X)^R} \arrow[dl, "\varphi"] \\
& \mathrm{G} &
\end{tikzcd}
$$

მაშინ φ_0 გრძელდება $\varphi_1\colon \mathrm{F(X)} \longrightarrow \mathrm{G}$ ჰომომორფიზმამდე თავისუფალი ჯგუფის თვისების გამო, ხოლო უკანასკნელი φ_1 ასახვა ტენზორული გასრულების თვისების გამო გრძელდება R- ჰომომორფიზმამდე $\varphi\colon \mathrm{F(X)^R} \longrightarrow \mathrm{G}$. ამგვარად, $\mathrm{F(X)^R} \cong \mathrm{F_R(X)}$ - თავისუფალი R-ჯგუფია ბაზისით X. ერთადერთობა გამომდინარეობს ტენზორული გასრულების ერთადერთობიდან.
□

ჩამოვაყალიბოთ ძირითადი თეორემა 5.1-ისა და თეორემა 6.1-ის შედეგი.

თეორემა 6.2. ვთქვათ, R რგოლი ქვერგოლის სახით შეიცავს მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ რგოლს. მაშინ $\mathrm{F_R(X)}$ თავისუფალი ჯგუფი ზუსტია R რგოლის მიმართ. სხვა სიტყვებით, $\mathrm{F(X)}$ ქვეჯგუფია $\mathrm{F_R(X)}$-ში.

დამტკიცება: თეორემა 6.1-ის თანახმად $\mathrm{F_R(X)} \cong \mathrm{F(X)^R}$. რადგან $\mathrm{F(X)} \in \mathcal{P}_R^o$ და არ შეიცავს ინვოლუციებს, ძირითადი თეორემა 5.1-ის თანახმად კანონიკური $\lambda\colon \mathrm{F(X)} \to \mathrm{F(X)^R}$ ასახვა ჩადგმაა. □

შემოვიტანოთ თავისუფალი ნამრავლის კონსტრუქცია R-ჯგუფთა კატეგორიაში, სადაც R ნებისმიერი ასოციაციური რგოლია ერთეულით.

განსაზღვრება 6.2. ვთქვათ, G_i, $i \in \mathrm{I}$, R- ჯგუფებია. ხარისხოვან R- ჯგუფს $\overset{*}{\mathrm{R}}\,\mathrm{G}_i$ ეწოდება თავისუფალი ნამრავლი $\mathcal{M}_R$ კატეგორიაში, თუ R- ჰომომორფიზმები $\varphi_i\colon \mathrm{G}_i \longrightarrow \overset{*}{\mathrm{R}}\,\mathrm{G}_i$ ისეთია, რომ ნებისმიერი R-ჰომომორფიზმებისათვის $\psi_i\colon \mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{H}$, სადაც H ნებისმიერი R-ჯგუფია, არსებობს R- ჰომომორფიზმი $\psi\colon \overset{*}{\mathrm{R}}\,\mathrm{G}_i \longrightarrow \mathrm{H}$, რომელიც კომუტაციურს ხდის შემდეგ დიაგრამებს:

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "\psi_i"'] & \overset{*}{\mathrm{R}}\,\mathrm{G}_i \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\
H &
\end{tikzcd}
\qquad (i\epsilon\mathrm{I}),$$

და $\overset{*}{\mathrm{R}}\,\mathrm{G}_i$ R- წარმოიქმნება სიმრავლით $\{\varphi_i(g_i) |\, g_i \in \mathrm{G}_i,\, i \in \mathrm{I}\}$.

კატეგორიათა თეორიის მოსაზრებებიდან გამომდინარეობს, რომ ჯგუფი $\overset{*}{\mathrm{R}}\,\mathrm{G}_i$ ერთადერთია R- იზომორფიზმამდე სიზუსტით.

თეორემა 6.3. ვთქვათ, R რგოლი ქვერგოლის სახით შეიცავს მთელ რიცხვთა $\mathbb{Z}$ რგოლს და G_i, $i \in \mathrm{I}$, R- ჯგუფთა რაღაც სიმრავლეა. მაშინ

1) $\overset{*}{\mathrm{R}}\,\mathrm{G}_i \cong (*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$;

2) კანონიკური ასახვა $\lambda\colon\ *\,\mathrm{G}_i \to (*\,\mathrm{G}_i)^R$ ჩადგმაა.

დამტკიცება:

1) ვთქვათ, $\varphi_i^{o}\colon \mathrm{G}_i \to *\,\mathrm{G}_i$ კანონიკური ჩადგმებია თავისუფალი ნამრავლის განსაზღვრებიდან. ვთქვათ, $\lambda\colon *\,\mathrm{G}_i \to (*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$ ტენზორული გასრულების კანონიკური ასახვაა. ვთქვათ, რომ $\varphi_i \circ \lambda = \varphi_i$. მაშინ $\varphi_i\colon\ \mathrm{G}_i \to (*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$ R- ჰომომორფიზმების ერთობლიობაა. ავიღოთ ნებისმიერი R- ჰომომორფიზმები $\psi_i\colon \mathrm{G}_i \to \mathrm{H}$. იმის დასამტკიცებლად, რომ $(*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$ თავისუფალი ნამრავლია $\mathcal{M}_R$ კატეგორიაში (ე.ი.$(*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}} \cong \overset{*}{_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{G}_i$), ჩვენ უნდა შევკრათ დიაგრამა

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{G}_i \arrow[r, "\varphi_i^{o}"'] \arrow[rr, bend left, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & *\,\mathrm{G}_i \arrow[r, dash, "\lambda"'] \arrow[d, "\varphi"] & (*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}} \arrow[dl, "\psi"] \\
& \mathrm{H} &
\end{tikzcd}
$$

კომუტაციურამდე.

თავისუფალი $\overset{*}{_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{G}_i$ ნამრავლის განსაზღვრებიდან $\mathcal{M}_R$ კატეგორიაში არსებობს ნაწილობრივი R-ჰომომორფიზმი $\varphi_i\colon \mathrm{G}_i \to \mathrm{H}$. ტენზორული გასრულების უნივერსალური თვისების გამო არსებობს R- ჰომომორფიზმი ψ, რომელიც φ-ს აგრძელებს. ის იქნება საძიებელი. აგრეთვე შესრულებულია $\varphi_i(\mathrm{G}_i)$ ანასახებით $(*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$-ს წარმოქმნა და ამიტომ $(*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$ თავისუფალი ნამრავლია $\mathcal{M}_R$ კატეგორიაში, ე.ი. $(*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}} \cong \overset{*}{_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{G}_i$.

2) იმის დასამტკიცებლად, რომ $\lambda\colon *\,\mathrm{G}_i \to (*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$ ჩადგმაა, საკმარისია შენიშვნა 5.2-ის თანახმად, დავამტკიცოთ, რომ ჯგუფი $*\,\mathrm{G}_i \in \mathcal{P}_R^{o}$. უკანასკნელი ადვილად გამომდინარეობს კუროშის თეორემიდან თავისუფალი ნამრავლის ქვეჯგუფების შესახებ. □

თეორემა 6.4. კლასი $\mathcal{P}_R^{o}$ ჩაკეტილია თავისუფალი R-ნამრავლების მიმართ.

დამტკიცება. ვთქვათ, G_i, $i \in \mathrm{I}$, ჯგუფთა ოჯახია $\mathcal{P}_R^{o}$-დან და $\lambda\colon \mathrm{G}_i \longrightarrow {\mathrm{G}_i}^{\mathrm{R}}$ კანონიკური ასახვები. პირობის თანახმად, ისინი ჩადგმებია. აქედან გამომდინარეობს, რომ ასახვა $\lambda\colon *\,\mathrm{G}_i \to (*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$ აგრეთვე ჩადგმაა. თეორემა 6.2-ის პუნქტი 2)-ის ძალით ასახვა $\varphi_i\colon \overset{*}{_{\mathrm{R}}}\,{\mathrm{G}_i}^{\mathrm{R}}$ აგრეთვე ჩადგმაა. იგივე თეორემის პუნქტი 1)-ის ძალით $\overset{*}{_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{G}_i \cong (*\,\mathrm{G}_i)^{\mathrm{R}}$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ თუ $\mathrm{G}_i \in \mathcal{P}_R^{o}$, მაშინ $\overset{*}{_{\mathrm{R}}}\,\mathrm{G}_i \in \mathcal{P}_R^{o}$. □

დ ა ს კ ვ ნ ა

ნაშრომი თეორიული ხასიათისააა. მიღებული შედეგები კარგ საფუძველს იძლევა ხარისხოვანი ჯგუფების მრავალსახეობათა თეორიის საფუძვლების შექმნისათვის.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] *Мальцев А.И. Нильпотентные группы без кручения // Изв. АН СССР. -сер.мат. -1949.-13.- №3, с. 201-212.*

[2] *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю.Н., Ремесленников В.Н. О пополнении групп // ДАН СССР.- 1960.- 134.- с. 518-520.*

[3] *Baumslag G. On free D-groups// Comm. pure and appl. math.- 1965.- v.18.- p. 25-30.*

[4] *Baumslag G. Lecture Notes on Nilpotent Groups// C.B.M.S. Regional Conf. Ser. №2.- Providence.-1971*

[5] *Кузьмин Ю.В. О метабелевых D- группах. // Усп. Мат. Наук.- 1972.- 27, №1, с.247-248*

[6] *Hall P. Nilpotent group// Canad. Math. Congress, Edmonton, 1957.*

[7] *Lyndon R. Croups with parametric exponents// Trans. Amer. Math. Soc.- 1960.- p. 518-533*

[8] *Baumslag G. Free abelian X- groups. Illinois journal of mathematics. vol. 30, №2, 1986, pp. 235-245*

[9] *Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. Степенные группы I. Основы теории и тензорные пополнения// Сиб. матем. журн. (1994), №5. с. 1106-1118.*

[10] *Амаглобели М.Г. Функтор тензорного пополнения в категориях степенных MR-групп. Алгебра и логика 57(2018), №2, 137-149.*

[11] *Фукс Л. Бесконечные абелевы группы.- Москва: Мир. 1977.- т.1.*

[12] *Атья. М., Макдональд Н. Введение в коммутативную алгебру.- М. : Мир. -1972*

[13] *Мясников А.Г., Ремесленников В.Н. Формульность множества мальцевских баз и элементарные свойства конечномерных алгебр// Сиб. мат. журн. 1982, т.23, №2. с. 97-113.*

[14] *В. Магнус , А. Коррас, Д. Солитэр. Комбинаторная теория групп. – Москва: Наука, 1974. – С.455.*

[15] *Амаглобели М.Г. Степенные MR-группы: точное R-пополнение, Докл. РАН, 486, №2(2019), 147-150.*