ივანე ჯავახიშვილის სახელობის

თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

გიორგი კიკნაძე

მარკოვის ჯაჭვები დისკრეტული დროით, ერგოდულობის თეორემა, მკაცრად მარკოვისეული თვისება, გამოყენებები

სამაგისტრო პროგრამის სახელწოდება: **მათემატიკა**

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: **მაგისტრი**

ხელმძღვანელი: ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი,თსუ ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასისტენტ-პროფესორი - **ზაზა ხეჩინაშვილი**

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

2021

სარჩევი

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია მარკოვის ჯაჭვები დისკრეტული დროით. შესწავლილია სტოქასტური მიმდევრობები, რომლებიც ქმნიან ერთგვაროვან მარკოვის ჯაჭვს, მნიშვნელობებით სასრულ ფაზურ სივრცეში. დამტკიცებულია ერგოდულობის თეორემის სამართლიანობა და მოყვანილია პირობები, რომლის დროსაც ერთგვაროვან მარკოვის ჯაჭვს აქვს მკაცრად მარკოვისეული თვისება. აგრეთვე დამტკიცებულია დიდ რიცხვთა კანონი სასრული ერგოდული მარკოვის ჯაჭვისათვის და განხილულია მარკოვის ჯაჭვების გამოყენების მაგალითები.

ნაშრომის ბოლო თავში დამტკიცებულია თეორემა სტოქასტური მატრიცების ნამრავლისა და წრფივი კომბინაციის სტოქასტურობის შესახებ, ასევე, მარკოვის თვისების გამოყენებით, დამტკიცებულია თეორემა მარკოვის მიმდევრობის შებრუნებული მიმდევრობის მარკოვისეულობის შესახებ და უფრო მეტიც, ნაჩვენებია, რომ საზოგადოდ, ელემენტთა ნებისმიერი გადანაცვლება არ არის მარკოვის ჯაჭვი.

Abstract

In the master thesis it is considered Markov chains at a discrete time. It is studied the stochastic sequences, that make a homogeneous Markov chains with values in the finite phase space. It is proved the ergodic theorem and the conditions under which a homogeneous Markov chain has a strictly Markov properties are given. It is also proved the law of large numbers for the finite ergodic Markov chains and it is considered examples how to apply Markov chains.

In the last chapter of thesis, it is proved that the product and the linear combination of stochastic matrices are stochastic. Also, using of Markov properties, it is proved, that the inverse of the Markov sequence is Markov and, moreover, it is shown, in general, any displacement of elements in Matkov sequence is not Markov chain.

1 შესავალი

თანამედროვე ალბათობის თეორია შეისწავლის შემთხვევით პროცესებს, რომლის დროსაც წინა ექსპერიმენტის ცოდნა გავლენას ახდენს მომდევნო ექპერიმენტის შედეგის წინასწარმეტყველებაზე. კერძოდ, როდესაც ვაკვირდებით რაიმე შემთხვევით ექსპერიმენტთა მიმდევრობას, ყველა წინა შედეგს შეუძლია გავლენა მოახდინოს მომდევნო ექსპერიმენტის შესაძლო შედეგის შეფასებაზე. მეოცე საუკუნის დასაწყისში ანდრეი მარკოვმა დაიწყო ახალი ტიპის შემთხვევითი პროცესების შესწავლა. ამ პროცესებში მოცემული ექსპერიმენტის შედეგები გავლენას ახდენს მომდევნო ექსპერიმენტის შედეგებზე. ამ ტიპის პროცესებს ეწოდათ მარკოვის ჯაჭვები.

ალბათობის თეორიაში მარკოვის მნიშვნელოვან წვლილს წარმოადგენს მის მიერ დაწყებული დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეების ჯამებისთვის ზღვარითი თეორემების გამოკვლევა და მარკოვის ჯაჭვით დაკავშირებული დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეების თეორიის შექმნა.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია მარკოვის ჯაჭვები დისკრეტული დროით. შესწავლილია სტოქასტური მიმდევრობები, რომლებიც ქმნიან ერთგვაროვან მარკოვის ჯაჭვს, მნიშვნელობებით სასრულ ფაზურ სივრცეში. დამტკიცებულია ერგოდულობის თეორემის სამართლიანობა და მოყვანილია პირობები, რომლის დროსაც ერთგვაროვან მარკოვის ჯაჭვს აქვს მკაცრად მარკოვისეული თვისება. ნაშრომში აგრეთვე დამტკიცებულია დიდ რიცხვთა კანონი სასრული ერგოდული მარკოვის ჯაჭვისათვის და განხილულია მარკოვის ჯაჭვების გამოყენების მაგალითები. სამაგისტრო ნაშრომის ბოლო თავში მოყვანილია და დამტკიცებულია შემდეგი ძირითადი თეორემები და განხილულია მასთან დაკავშირებული ამოცანები.

თეორემა 1. ვთქვათ, $P = \{p_{ij}\}_{n\times n}$ და $Q = \{q_{ij}\}_{n\times n}$ არიან $n \times n$-ზე სტოქასტური მატრიცები. მაშინ მათი ნამრავლი PQ და წრფივი კომბინაცია $\alpha P + (1-\alpha)Q$, სადაც $0 \le \alpha \le 1$, აგრეთვე სტოქასტური მატრიცებია.

თეორემა 2. თუ $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა წარმოადგენს მარკოვის ჯაჭვს, მაშინ შებრუნებული მიმდევრობაც $(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_0)$ მარკოვის ჯაჭვია.

თეორემა 3. ვთქვათ, $\xi_0, \xi_1, \cdots$ დამოუკიდებელი, მთელმნიშვნელობიანი შემთვევითი სიდიდეებია და $P(\xi_n = k) = p_k, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. დავუშვათ, რომ $\eta_n = \xi_0 + \cdots + \xi_n$. დავამტკიცოთ, რომ η_n მიმდევრობა მარკოვის ჯაჭვია და ვიპოვოთ გადასვლის ალბათობები ერთ ნაბიჯზე.

2 ძირითადი განმარტებები და დამხმარე დებულებები

2.1. ალბათური სივრცე, პირობითი ალბათობა ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის დაყოფის მიმართ, სრული ალბათობის ფორმულა

განვიხილოთ რაიმე ექპერიმენტი, რომლის ყველა შესაძლო შედეგი აღიწერება სხვადასხვა შედეგის (მოვლენის) სასრული $\omega_1, \cdots, \omega_N$ რიცხვით. შედეგებს $\omega_1, \cdots, \omega_N$ ვუწოდებთ ელემენტარულ ხდომილებებს, ხოლო მათ ერთობლიობას

$$\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_N\}$$

ელემენტარულ ხდომილებათა (სასრულ) სივრცეს ან შედეგების სივრცეს. განვიხილოთ ელემენტარულ ხდომილებათა სივრცის სტრუქტურის აღწერის რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. მონეტის ერთხელ აგდების დროს შედეგთა Ω სივრცე შედეგბა ორი წერტილისგან

$$\Omega = \{\text{გ}, \text{ს}\},$$

სადაც გ - "გერბია ს - "საფასურია".

მაგალითი 2. მონეტის n-ჯერ აგდების დროს შედეგთა Ω სივრცეა

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \cdots, a_n), a_i = \text{გ ან ს}\}$$

და შედეგეის საერთო რიცხვია $N(\Omega) = 2^n$.

Ω-ს ყოველ ისეთ $A \subseteq \Omega$ ქვესიმრავლეს, რომლისთვისაც ესპერიმენტების პირობების მიხედვით შესაძლებელია ორიდან ერთ-ერთი ტიპის პასუხი: "შედეგი $\omega \in A$" ან "შედეგი $\omega \notin A$", ეწოდება ხდომილება.

მაგალითად, მონეტის სამჯერ აგდებისას ყველა შედეგთა Ω სივრცე იქნება

$$\Omega = \{\text{გგგ, გგს, გსგ, გსს, სსს, სსგ, სგს, სგგ}\}$$

და თუ "პირობათა კომპლექსი"ყველა სამი აგდების შედეგის ჩაწერის საშუალებას იძლევა, მაშინ ვამბობთ, რომ

$$A = \{\text{გგგ, გგს, გსგ, სგგ}\}$$

ხდომილებაა, რომელიც ნიშნავს, რომ მოვიდა ორი "გერბი"მაინც.

ალბათობის თეორიაში $\emptyset$ სიმრავლეს შეუძლებელი ხდომილება ეწოდება, ხოლო Ω სიმრავლეს - აუცილებელი ხდომილება. თუ განვიხილავთ $A \subseteq \Omega$ სიმრავლეების რაიმე $\mathcal{A}_0$ სისტემას, მაშინ ამ სისტემის ელემენტებიდან $\cup$, $\cap$, და$\setminus$ სიმრავლური ოპერაციების საშუალებით შეიძლება ხდომილების ახალი სისტემის აგება. თუ ამ ხდომილებებს დავუმატებთ აუცილებელ Ω

და შეუძლებელ $\emptyset$ ხდომილებებს, მაშინ მივიღებთ სიმრავლეთა $\mathcal{A}$ სისტემას, რომელიც წარმოადგენს ალგებრას. ე.ი., $\mathcal{A}$ ალგებრა არის Ω სიმრავლის ქვესიმრავლეთა ისეთი სისტემა, რომლისთვისაც:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. თუ $A \in \mathcal{A}$, მაშინ $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ სიმრავლეები აგრეთვე ეკუთვნის $\mathcal{A} -$ს.

ვიტყვით, რომ სიმრავლეთა სისტემა

$$\mathfrak{D} = \{D_1, \cdots, D_n\}$$

ქმნის Ω სიმრავლის **დაყოფას**, ხოლო D_i ამ დაყოფის ატომებია, თუ D_i სიმრავლეები არაცარიელია, წყვილ-წყვილად არ იკვეთება და მათი ჯამი Ω-ს ტოლია:

$$D_1 + \cdots + D_n = \Omega$$

თუ განვიხილავთ $\mathfrak{D}$ დაყოფის სიმრავლეთა ყველა შესაძლო გაერთიანებას, მაშინ მიღებულ სიმრავლეთა სისტემა ცარიელ $\emptyset$ სიმრავლესთან ერთად იქნება ალგებრა, რომელსაც $\mathfrak{D}$ **დაყოფით წარმოქმნილი ალგებრა** ეწოდება და $a(\mathfrak{D})$ სიმბოლოთი აღინიშნება. ამრიგად, $a(\mathfrak{D})$ ალგებრის ელემენტები შედგება ცარიელი სიმრავლისგან დაიმ სიმრავლეთა ჯამებისგან, რომლებიც $\mathfrak{D}$ დაყოფის ატომებია.

ასევე, თუ $\mathfrak{D}$ რაიმე დაყოფაა, მაშინ მას ცალსახად შეესაბამება $\mathfrak{B} = a(\mathfrak{D})$ ალგებრა და სამართლიანია შებრუნებული მტკიცებულებაც: ვთქვათ, $\mathfrak{B}$ არის სასრული Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა რაიმე ალგებრა. მაშინ მოიძებნება ერთადერთი დაყოფა $\mathfrak{D}$, რომლის ატომები $\mathfrak{B}$ ალგებრის ელემენტებია, და ისეთი, რომ $\mathfrak{B} = a(\mathfrak{D})$.

ყოველ ელემენტარულ ω_i, $i = 1, \cdots, N$ ხდომილებას მივუწეროთ გარკვეული "წონა რომელიც აღინიშნება $p(\omega_i)$ სიმბოლოთი და ეწოდება ω_i შედეგის **ალბათობა** და რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $0 \le p(\omega_i) \le 1$,
2. $p(\omega_1) + \cdots + p(\omega_N) = 1$.

ω_i შედეგის მოცემული $p(\omega_i)$ ალბათობებით განვსაზღვროთ ნებისმიერი $A \in \mathcal{A}$ ხდომილების $P(A)$ ალბათობა ფორმულით

$$P(A) = \sum_{i=1}^{N} p(\omega_i), \qquad \omega_i \in A. \tag{2.1}$$

განსაზღვრება 2.1 *ვიტყვით, რომ "ალბათური სივრცე"*

$$(\Omega, \mathcal{A}, P),$$

სადაც $\Omega = \{\omega_1, \cdots \omega_N\}$, $\mathcal{A}$ არის Ω-ს ქვესიმრავლეთა რაიმე ალგებრა და $P = \{P(A) : A \in \mathcal{A}\}$, განსაზღვრავს ექსპერიმენტის ***ალბათურ მოდელს****, რომელსაც გააჩნია შედეგების (ელემენტარული ხდომილებების) სასრული Ω სივრცე ხდომილებათა $\mathcal{A}$ ალგებრით.*

2.1 განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს ალბათობის შემდეგი თვისებები:

$$P(\emptyset) = 0, \tag{2.2a}$$

$$P(\Omega) = 1, \tag{2.2b}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \tag{2.2c}$$

$$\text{კერძოდ, თუ} \quad A \cap B = \emptyset, \quad \text{მაშინ} \qquad P(A \cup B) = P(A) + P(B), \tag{2.2d}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A). \tag{2.2e}$$

სადაც $\overline{A}$ არის Ω-ს იმ წერტილების სიმრავლე, რომელიც არ ეკუთვნის A-ს.

მოვიყვანოთ პირობითი ალბათობის განსაზღვრება. ვთქვათ, $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ - (სასრული) ალბათური სივრცეა და A რაიმე ხდომილებაა, ე.ი. $A \in \mathcal{A}$.

განსაზღვრება 2.2 *B ხდომილების* ***პირობითი ალბათობა*** *A ხდომილების პირობით, რომლისთვისაც $P(A) > 0$, აღინიშნება $P(B|A)$-თი და ეწოდება სიდიდეს*

$$\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{2.3}$$

ალბათობის კლასიკური ხერხით მოცემის შემთხვევაში $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}, \quad P(AB) = \dfrac{N(AB)}{N(\Omega)}$. და, მაშასადამე,

$$P(B|A) = \frac{N(AB)}{N(A)}. \tag{2.4}$$

2.2 განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს პირობითი ალბათობის შემდეგი თვისებები:

$$P(A|A) = 1,$$

$$P(\emptyset|A) = 0,$$

$$P(B|A) = 1, \quad A \subseteq B,$$

$$P(B_1 + B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A).$$

შემდეგი მარტივი, მაგრამ მნიშვნელოვანი ფორმულა, რომელსაც სრული ალათობის ფორმულა ეწოდება, პირობითი ალბათობების საშუალებით რთული ხდომილებების ალბათობების

გამოთვლის ძირითადი საშუალებაა. განვიხილოთ რაიმე დაყოფა $\mathfrak{D} = \{A_1, \cdots, A_n\}, P(A_i) > 0, i = 1, \cdots, n$. ცხადია, რომ $B = BA_1 + \cdots + BA_n$ და, მაშასადამე, $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i)$, მაგრამ $P(BA_i) = P(B|A_i)P(A_i)$. ამრიგად გვაქვს **სრული ალბათობის ფორმულა**

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \tag{2.5}$$

კერძოდ, თუ $0 < P(A) < 1$, მაშინ

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\overline{A})P(\overline{A}). \tag{2.6}$$

2.2. შემთხვევითი სიდიდე და მისი მახასიათებლები, პირობითი მათემატიკური ლოდინი დაყოფის მიმართ, გაჩერების მომენტები

ξ შემთხვევითი სიდიდეების ალბათური სტრუქტურა სრულად აღიწერება ალბათობების $\{P_\xi(x_i), i = 1, \cdots, m\}$ განაწილებით. განაწილების ფუნქციის ცნება გვაძლევს შემთხვევითი სიდიდეების ალბათური სტრუქტურის ექვივალენტურ აღწერას.

განსაზღვრება 2.3 *ვთქვათ, $x \in \mathbb{R}^1$. ფუნქციას*

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) \le x\}$$

*ეწოდება ξ შემთხვევითი სიდიდის **განაწილების ფუნქცია**.*

ცხადია, რომ

$$F_\xi(x) = \sum_{i:x_i \le x} P_\xi(x_i)$$

და $P_\xi(x_i) = F_\xi(x_i) - F_\xi(x_i -)$, სადაც $F_\xi(x_i -) = \lim_{y \to x} F_\xi(y)$.

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ - (სასრული) ალბათური სივრცეა და $\xi = \xi(\omega)$ - რაიმე შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც იღებს მნიშვნელობებს $X = \{x_1, \cdots, x_k\}$ სიმრავლეში. თუ აღვნიშნავთ $A_i = \{\omega : \xi = x_i\}, i = 1, \cdots, k$, მაშინ ცხადია, რომ ξ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\xi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} x_i I(A_i), \tag{2.7}$$

სადაც $A_1, \cdots, A_k$ სიმრავლეები ქმნიან Ω სივრცის დაყოფას (ე.ი. ისინი წყვილ-წყვილად არ იკვეთებიან და მათი ჯამი უდრის Ω-ს.)

განსაზღვრება 2.4 *$\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i I(A_i)$ შემთხვევითი სიდიდის **მათემატიკური ლოდინი** ანუ საშუალო მნიშვნელობა ეწოდება რიცხვს*

$$\boldsymbol{E}\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P(A_i). \tag{2.8}$$

რადგან $A_i = \{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$ და $P_\xi(x_i) = P(A_i)$, ამიტომ

$$\boldsymbol{E}\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P_\xi(x_i). \tag{2.9}$$

ჩამოვაყალიბოთ მათემატიკური ლოდინის ძირითადი თვისებები:

1. თუ $\xi \ge 0$, მაშინ $\boldsymbol{E}\xi \ge 0$.

2. $\boldsymbol{E}(a\xi + b\eta) = a\boldsymbol{E}\xi + b\boldsymbol{E}\eta, \quad a, b$ - მუდმივებია.

3. თუ $\xi \ge \eta$, მაშინ $\boldsymbol{E}\xi \ge \boldsymbol{E}\eta$.

4. $|\boldsymbol{E}\xi| \le \boldsymbol{E}|\xi|$.

5. თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ $\boldsymbol{E}\xi\eta = \boldsymbol{E}\xi\boldsymbol{E}\eta$.

6. $\boldsymbol{E}|\xi\eta|^2 \le \boldsymbol{E}\xi^2\boldsymbol{E}\eta^2$.

7. თუ $\xi = I(A)$, მაშინ $\boldsymbol{E}\xi = P(A)$.

განსაზღვრება 2.5 *ξ შემთხვევითი სიდიდის* ***დისპერსია*** *აღინიშნება $D\xi$ სიმბოლოთი და ეწოდება სიდიდეს*

$$D\xi = \boldsymbol{E}(\xi - \boldsymbol{E}\xi)^2.$$

სიდიდეს $\sigma = +\sqrt{D\xi}$ ეწოდება სტანდარტული გადახრა.

თუ ξ ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეა მნიშვნელობებით 1 და 0 და შესაბამისი ალბათობებით p და q, მაშინ

$$D\xi = \boldsymbol{E}(\xi - \boldsymbol{E}\xi)^2 = \boldsymbol{E}(\xi - p)^2 = (1-p)^2\,p + p^2q = pq.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ $\xi_1, \cdots, \xi_n$ - დამოუკიდებელი (ერთნაირად განაწილებული) ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობაა და $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, მაშინ

$$DS_n = n\,p\,q. \tag{2.10}$$

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ სასრული ალბათური სივრცეა და $\mathfrak{D} = \{D_1, \cdots, D_k\}$ არის Ω სივრცის რაიმე დაყოფა ($D_i \in \mathcal{A}, P(D_i) > 0, i = 1, \cdots, k\; D_1 + \cdots + D_k = \Omega$). ვთქვათ, A არის ხდომილება $\mathcal{A}$-დან და $P(A|D_i)$ არის A ხდომილების პირობითი ალბათობა D_i ხდომილების მიმართ.

პირობითი ალბათობების ერთობლიობას $\{P(A|D_i), i = 1, \cdots, k\}$ შეიძლება დავუკავშიროთ შემთხვევითი სიდიდე

$$\pi(\omega) = \sum_{i=1}^{k} P(A|D_i) I_{D_i}(\omega) \tag{2.11}$$

რომელიც დაყოფის D_i ატომებზე ღებულობს $P(A|D_i)$ მნიშვნელობებს. იმის ხაზგასასმელად, რომ ეს შემთხვევითი სიდიდე დაკავშირებულია კონკრეტულად $\mathfrak{D}$ დაყოფასთან, მას აღნიშნავენ

$$P(A|\mathfrak{D}) \quad \text{ან} \quad P(A|\mathfrak{D})(\omega)$$

სიმბოლოთი და ეწოდება A ხდომილების **პირობითი ალბათობა $\mathfrak{D}$ დაყოფის მიმართ**. ცხადია პირობითი ალბათობის შემდეგი ორი თვისება:

$$P(A + B|\mathfrak{D}) = P(A|\mathfrak{D}) + P(B|\mathfrak{D}). \tag{2.12}$$

თუ $\mathfrak{D}$ ერთი Ω სიმრავლისგან შემდგარი ტრივიალური დაყოფაა, მაშინ

$$P(A|\mathfrak{D}) = P(A). \tag{2.13}$$

$P(A|\mathfrak{D})$ პირობითი ალბათობების, როგორც შემთხვევითი სიდიდის განსაზღვრება, საშუალებას გვაძლევს ვისაუბროთ მისი მათემატიკური ლოდინის შესახებ, რომლის გამოყენებით შეიძლება სრული ალბათობის ფორმულის (2.5) შემდეგი კომპაქტური სახით ჩაწერა:

$$\boldsymbol{E}P(A|\mathfrak{D}) = P(A). \tag{2.14}$$

ვთქვათ $\xi = \xi(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეა მნიშვნელობების $X = \{x_1, \cdots, x_l\}$ სიმრავლეში:

$$\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j I_{A_j}, \quad A_j = \{\omega : \xi = x_j\},$$

და $\mathfrak{D} = \{D_1, \cdots, D_k\}$ რაიმე დაყოფაა. ისევე როგორც $P(A_j), j = 1, \cdots l$ ალბათობებით, ξ შემთხვევითი სიდიდისთვის განსაზღვრული იყო მათემატიკური ლოდინი

$$\boldsymbol{E}\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j), \tag{2.15}$$

$P(A_j|\mathfrak{D}), j = 1, \cdots l$ პირობითი ალბათობების საშუალებით ბუნებრივია განვსაზღვროთ ξ შემთხვევითი სიდიდის **პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\mathfrak{D}$ დაყოფის მიმართ**, რომელიც აღინიშნება $\boldsymbol{E}(\xi|\mathfrak{D})$ ან $\boldsymbol{E}(\xi|\mathfrak{D})(\omega)$ სიმბოლოთი. სახელდობრ,

$$\boldsymbol{E}(\xi|\mathfrak{D}) = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathfrak{D}). \tag{2.16}$$

ამ განსაზღვრების თანახმად, პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\boldsymbol{E}(\xi|\mathfrak{D})(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც ერთი და იგივე D_i ატომის ყველა ω ელემენტარული ხდომილებისთვის იღებს ერთსა და იმავე $\sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|D_i)$ მნიშვნელობას.

განსაზღვრება 2.6 *$\tau = \tau(\omega)$ შემთხვევით სიდიდეს, მნიშვნელობებით $1, 2, \cdots, n$, ეწოდება **გაჩერების მომენტი** $(\mathfrak{D})_{a \le k \le n}$ დაყოფების მიმართ, $\mathfrak{D}_1 \preceq \mathfrak{D}_2 \preceq \cdots \preceq \mathfrak{D}_n$, თუ ნებისმიერ $k = 1, \cdots, n$-თვის $I_{\tau=k}(\omega)$ შემთხვევითი სიდიდე არის $\mathfrak{D}_k$ - ზომადი.*

თუ $\mathfrak{D}_k$ დაყოფას განვიხილავთ, როგორც k ნაბიჯზე დაკვირვებით წარმოქმნილ დაყოფას (მაგალითად, $\mathfrak{D}_k = \mathfrak{D}_{\eta_1, \cdots, \eta_k}$ არის $\eta_1, \cdots, \eta_k$ სიდიდეებით წარმოქმნილი დაყოფა), მაშინ $I_{\tau=k}(\omega)$ სიდიდის $\mathfrak{D}_k$ - ზომადობა ნიშნავს, რომ $\{\tau = k\}$ ხდომილების მოხდენა ან არმოხდენა განისაზღვრება მხოლოდ k ნაბიჯზე დაკვირვებით (და არ არის დამოკიდებული "მომავალზე").

თუ $\mathfrak{B}_k = \alpha(\mathfrak{D}_k)$, მაშინ $I_{\tau=k}(\omega)$ სიდიდის $\mathfrak{D}_k$ - ზომადობა ექვივალენტურია დაშვების, რომ

$$\{\tau = k\} = \mathfrak{B}_k. \tag{2.17}$$

2.3. შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობები, ზღვარითი თეორემები

განსაზღვრება 2.7 *სამეულს* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, *სადაც*

$$\Omega = \{\omega : \omega = (a_1, \cdots, a_n),\, a_i = 0, 1\},$$

$$\mathcal{A} = \{A : A \subseteq \Omega\}, \qquad P(\{\omega\}) = p^{\sum a_i}\, q^{n-\sum a_i} (= p(\omega))$$

რომელიც შეესაბამება n*-დამოუკიდებელ ორშედეგიან ცდას,* ***ბერნულის სქემა*** *ეწოდება.*

მოვიყვანოთ ბერნულის სქემის ზოგიერთი ზღვარითი თვისება.

შემოვიტანოთ $\xi_1, \cdots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეები შემდეგნაირად: $\omega = (a_1, \cdots, a_n)$-თვის $\xi_i(\omega) = a_i, \quad i = 1, \cdots, n$. როგორც უკვე ვნახეთ, ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_i(\omega), \quad i = 1, \cdots, n$ დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებულია:

$$P\{\xi_i = 1\} = p, \quad P\{\xi_i = 0\} = q, \quad i = 1, \cdots, n.$$

გასაგებია, რომ ξ_i შემთხვევითი სიდიდე ახასიათებს ცდის შედეგს i-ურ ნაბიჯზე.

დავუშვათ, $S_0(\omega) = 0$ და

$$S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k, \quad k = 1, \cdots, n.$$

მაშინ $\boldsymbol{E} S_n = np$ და, შესაბამისად

$$\boldsymbol{E}\frac{S_n}{n} = p \tag{2.18}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ, "წარმატების"მოხდენის ფარდობითი სიხშირის, ე.ი. $\dfrac{S_n}{n}$ სიდიდის საშუალო მნიშვნელობა ემთხვევა "წარმატების"p ალბათობას. აქედან ბუნებრივად ისმის კითხვა იმის შესახებ, რა სიდიდისაა "წარმატების"$\dfrac{S_n}{n}$ ფარდობით სიხშირეთა გადახრები მისი p ალბათობებისგან.

პირველ ყოვლისა, არ უნდა ველოდოთ, რომ საკმარისად მცირე $\varepsilon > 0$ რიცხვის და n-ის დიდი მნიშვნელობებისთვის $\dfrac{S_n}{n}$ ფარდობითი სიხშირის გადახრები p ალბათობისაგან იქნება ε-ზე ნაკლები ყველა ω-თვის, ანუ შესრულდება უტოლობა

$$\Big|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\Big| \le \varepsilon, \quad \omega \in \Omega. \tag{2.19}$$

თუმცა დიდი n-თვის $\{\dfrac{S_n}{n} = 1\}$ და $\{\dfrac{S_n}{n} = 0\}$ ხდომილებების ალბათობები მცირეა. ამიტომ იმ ω შედეგების ჯამური ალბათობა, რომლისთვისაც საკმარისად დიდი n-თვის $\Big|\dfrac{S_n(\omega)}{n} - p\Big| > \varepsilon$, აგრეთვე მცირე იქნება.

ამასთან დაკავშირებით შევაფასოთ

$$\Big\{\omega : \Big|\frac{S_n(\omega)}{n} - p\Big| > \varepsilon\Big\}$$

ხდომილების ალბათობა, რისთვისაც დაგვჭირდება შემდეგი უტოლობა, რომელიც მიღებულია პ.ლ. ჩებიშევის მიერ.

განსაზღვრება 2.8 *(ჩებიშევის უტოლობა)*

ვთქვათ, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ რაიმე ალბათური სივრცეა და $\xi = \xi(\omega)$ - არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{\boldsymbol{E}\xi}{\varepsilon}. \tag{2.20}$$

დამტკიცება: შევნიშნოთ, რომ

$$\xi = \xi I(\xi \geq \varepsilon) + \xi I(\xi < \varepsilon) \geq \xi I(\xi \geq \varepsilon) \geq \varepsilon I(\xi \geq \varepsilon),$$

სადაც $I(A)$ არის A სიმრავლის ინდიკატორი.

ამიტომ მათემატიკური ლოდინის თვისებების თანახმად

$$\boldsymbol{E}\xi \geq \varepsilon \boldsymbol{E} I(\xi \geq \varepsilon) = \varepsilon P\{\xi \geq \varepsilon\},$$

რაც ამტკიცებს (2.20)-ს

შედეგები. ვთქვათ, ξ ნებისმიერი შემთხვევითი სიდიდეა, მაშინ $\varepsilon \geq 0$ რიცხვისთვის

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\boldsymbol{E}|\xi|}{\varepsilon},$$

$$P\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq P\{\xi^2 \geq \varepsilon^2\} \leq \frac{\boldsymbol{E}\xi^2}{\varepsilon^2}, \tag{2.21}$$

$$P\{|\xi - \boldsymbol{E}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

ავიღოთ $\xi = \dfrac{S_n}{n}$ და ვისარგებლოთ ბოლო უტოლობით. მაშინ, (2.10)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geq \varepsilon\Big\} \leq \frac{D(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2} = \frac{DS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{npq}{n^2\varepsilon^2} = \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

ამრიგად,

$$P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n} - p\Big| \geq \varepsilon\Big\} \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} \tag{2.22}$$

საიდანაც ჩანს, რომ დიდი n-თვის საკმარისად მცირეა იმის ალბათობა, რომ "წარმატების"ფარდობითი სიხშირის $\dfrac{S_n}{n}$ გადახრა მისი p ალბათობიდან ε-ზე მეტია.

აღვნიშნოთ ყველა $n \geq 1$ და $0 \leq k \leq n$ რიცხვებისთვის

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

მაშინ

$$P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}-p\Big|\geq\varepsilon\Big\}=\sum_{\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}}P_n(k),$$

და (2.22)-ში დავადგენთ, რომ

$$\sum_{\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}}P_n(k)\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}\leq\frac{1}{4n\varepsilon^2}, \tag{2.23}$$

ე.ი. დავამტკიცეთ გარკვეული უტოლობა, რომელიც შეიძლება მიგვეღო ანალიზურად, ალბათური ინტერპრეტაციის გამოყენების გარეშე.

(2.23)-დან ცხადია, რომ

$$\sum_{\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}}P_n(k)\to 0,\quad n\to\infty. \tag{2.24}$$

(2.24) ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$P\Big\{\Big|\frac{S_n}{n}-p\Big|\geq\varepsilon\Big\}\to 0,\quad n\to\infty. \tag{2.25}$$

და ასევე შეიძლება ჩავწეროთ ელემენტარული ალბათობის თეორიის ენაზე.

ვთქვათ, $(\Omega^{(n)},\mathcal{A}^{(n)},P^{(n)}),n\geq 1$ ბერნულის სქემების მიმდევრობაა ისეთი, რომ

$$\Omega^{(n)}=\{\omega^{(n)}:\omega^{(n)}=(a_1^{(n)},\cdots,a_n^{(n)}),\quad a_i^{(n)}=0,1\},$$

$$\mathcal{A}^{(n)}=\{A:A\subseteq\Omega^{(n)}\},$$

$$P^{(n)}(\omega^{(n)})=p^{\sum a_i^{(n)}}\,q^{n-\sum a_i^{(n)}},$$

$$S_k^{(n)}(\omega^{(n)})=\xi_1^{(n)}(\omega^{(n)})+\cdots+\xi_k^{(n)}(\omega^{(n)}),$$

სადაც ყოველი $n\geq 1$ რიცხვისთვის $\xi_1^{(n)},\cdots,\xi_n^{(n)}$ არის დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული ბერნულის შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა. მაშინ

$$P^{(n)}\Big\{\omega^{(n)}:\Big|\frac{S_n^{(n)}(\omega^{(n)})}{n}-p\Big|\geq\varepsilon\Big\}=\sum_{\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}}P_n(k)\to 0,\quad n\to\infty. \tag{2.26}$$

(2.24)-(2.26) ტიპის მტკიცებულებები ატარებს სახელწოდებას **"ი. ბერნულის დიდ რიცხვთა კანონი"**.

ი. ბერნულის დამტკიცება მდგომარეობდა (2.24) მტკიცებულების დადგენაში, რაც მის მიერ სრულიად მკაცრად იყო გაკეთებული $P_n(k)$ ბინომური ალბათობების "კუდების"შეფასებების გამოყენებით. ბინომური განაწილების "კუდების"ალბათობების ჯამის $\sum_{\{k:\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\}}P_n(k)$ უშუალო გამოთვლა დიდი n-თვის საკმაოდ შრომატევადი ამოცანაა, ამასთან მიღებული ფორმულები ნაკლებად გამოყენებადია იმის პრაქტიკული შეფასებისთვის, თუ რა ალბათობით განსხვავდება $\frac{S_n}{n}$ ფარდობითი სიხშირე p-გან ε-ზე ნაკლები სიდიდით. სწორედ ამიტომ დიდი მნიშვნელობა ჰქონდა მუავრის და ლაპლასის მიერ $P_n(k)$ ალბათობებისთვის მიღებულ მარტივ

ასიმპტოტურ ფორმულებს, რამაც საშუალება მოგვცა არა მარტო ხელახლა დაგვემტკიცებინა დიდ რიცხვთა კანონი, არამედ მიგვეღო მისი დაზუსტებები - ე.წ. ლოკალური და ინტეგრალური ზღვარითი თეორემები.

3 მარკოვის ჯაჭვები, ერგოდულობის თეორემები, დიდი რიცხვთა კანონი მარკოვის ჯაჭვისთვის

3.1. მარკოვის ჯაჭვების განმარტება და თვისებები, მაგალითები

ბერნულის სქემაში $\Omega = \{\omega : \omega = (x_1, \cdots, x_n)\}$ ყოველი ω შედეგის ალბათობა მოიცემოდა ფორმულით $P\big(\{\omega\}\big) = p(\omega)$ სადაც

$$p(\omega) = p(x_1)(x_n), \tag{3.1}$$

$p(x) = p^x q^{1-x}$. ამ პირობაში $\xi_1, \cdots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეები იყო დამოუკიდებელი და ერთნაირად განაწილებული, სადაც

$$P\{\xi_1 = x\} = \{\xi_n = x\} = p(x), \qquad x = 0, 1.$$

თუ (3.1)-ის მაგივრად დავუშვებთ

$$p(\omega) = p_1(x_1)_n(x_n)$$

სადაც $p_i(x) = p_i^x(1-p_i)^{1-x}, \quad 0_i \leq 1$, მაშინ $\xi_1, \cdots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეები აგრეთვე იქნება დამოუკიდებელი, მაგრამ სხვადასხვანაირად განაწილებული

$$P\{\xi_1 = x\} = p_1(x), \cdots, \qquad P\{\xi_n = x\} = p_n(x)$$

განვიხილოთ ამ სქემების ერთი განზოგადება, რომელსაც მივყავართ დამოკიდებული შემთხვევითი სიდიდეებისკენ, რომლებიც ქმნიან ე.წ. მარკოვის ჯაჭვს.

ვიგულისხმოთ, რომ

$$\Omega = \{\omega : \omega = (x_0, x_1, \cdots, x_n),\, x_i \in X\},$$

სადაც X არის რაიმე სასრული სიმრავლე. ვთქვათ, მოცემულია არაუარყოფითი ფუნქციები $p_0(x), p_1(x,y), \cdots, p_n(x,y)$ ისეთი, რომ $\sum\limits_{x\in X} p_0(x) = 1$

$$\sum_{y\in X} p_k(x,y) = 1, \qquad k = 1, \cdots, n, \quad , x \in X. \tag{3.2}$$

ყოველი $\omega = (x_0, x_1, \cdots, x_n)$ შედეგისთვის დავუშვათ $P\big(\{\omega\}\big) = p(\omega)$, სადაც

$$p(\omega) = p_0(x_0)p_1(x_0, x_1)\cdots p_n(x_{n-1}, x_n). \tag{3.3}$$

ძნელი არ არის შევამოწმოთ, რომ $\sum\limits_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$ და, მასაშადამე, ამ $p(\omega)$ რიცხვების ერთობლიობა Ω სივრცესთან და მისი ყველა ქვესიმრავლეთა სისტემასთან ერთად განსაზღვრავს

გარკვეულ ალბათურ მოდელს $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$, რომელსაც მიღებულია ვუწოდოთ მარკოვის ჯაჭვთან დაკავშირებული ცდების მოდელი.

განვიხილოთ შემთხვევითი სიდიდეები $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n, \quad \xi_i(\omega) = x_i, \quad \omega = (x_1, \cdots, x_n)$-თვის. მარტივი გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ $P\{\xi_0 = a\} = p_0(a)$,

$$P\{\xi_0 = a, \cdots, \xi_k = a_k\} = p_0(a_0)p_1(a_0, a_1)\cdots p_k(a_{k-1}, a_k). \tag{3.4}$$

დავადგინოთ ახლა განხილული $(\Omega,\, \mathcal{A},\, P)$ ალბათური მოდელის დროს პირობითი ალბათობების შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება:

$$P(\xi_{k+1} = a_{k+1} \,|\, \xi_k = a_k, \cdots, \xi_0 = a_0) = P(\xi_{k+1} = a_{k+1} \,|\, \xi_k = a_k) \tag{3.5}$$

(დაშვებაში $P\{\xi_k = a_k, \cdots, \xi_0 = a_0\} > 0$).

(3.4)-ის და პირობითი ალბათობის განსაზღვრების ძალით,

$$P(\xi_{k+1} = a_{k+1} \,|\, \xi_k = a_k, \cdots, \xi_0 = a_0) = \frac{P(\xi_{k+1} = a_{k+1}, \cdots, \xi_0 = a_0)}{P(\xi_k = a_k, \cdots, \xi_0 = a_0)}$$

$$= \frac{p_0(a_0)p_1(a_0, a_1)\cdots p_{k+1}(a_k, a_{k+1})}{p_0(a_0)\cdots p_k(a_{k-1}, a_k)} = p_{k+1}(a_k, a_{k+1})$$

ანალოგიურად მოწმდება ტოლობა

$$P(\xi_{k+1} = a_{k+1} \,|\, \xi_k = a_k) = p_{k+1}(a_k, a_{k+1}), \tag{3.6}$$

რაც ამტკიცებს (3.5) თვისებას.

ვთქვათ, $\mathfrak{D}_k^\xi = \mathfrak{D}_{\xi_0, \cdots, \xi_k}$ არის $\xi_0, \cdots, \xi_k$ სიდიდეებით წარმოქმნილი დაყოფა და $\mathfrak{B}_k^\xi = a(\mathfrak{D}_k^\xi)$. მაშინ (3.5)-დან გამომდინარეობს, რომ

$$P(\xi_{k+1} = a_{k+1} | \mathfrak{B}_k^\xi) = P(\xi_{k+1} = a_{k+1} | \xi_k), \tag{3.7}$$

ან

$$P(\xi_{k+1} = a_{k+1} | \xi_0, \cdots, \xi_k) = P(\xi_{k+1} = a_{k+1} | \xi_k).$$

(3.5) ფორმულის დადგენის დროს იგულისხმება, რომ $P\{\xi_k = a_k, \cdots, \xi_0 = a_0\} > 0$ (და, მაშადასამე, $P\{\xi_k = a_k\} > 0$). ეს საჭირო იყო იმიტომ, რომ პირობითი ალბათობები $P(A|B)$ განისაზღვრებოდა მხოლოდ დაშვებაში $P(B) > 0$.

გარკვეულობისთის შემდგომში $P(A|B)$ პირობითი ალბათობა განვსაზღვროთ ფორმულით

$$P(A|B) = \begin{cases} \dfrac{P(AB)}{P(B)}, & \text{თუ} \quad P(B) > 0, \\ 0, & \text{თუ} \quad P(B) = 0. \end{cases}$$

(3.5) და (3.7) ფორმულები ასეთი განსაზღვრის დროს ხდება სამართლიანი $P\{\xi_k = a_k, \cdots, \xi_0 = a_0\}$ ტიპის ყოველგვარი შენიშვნის გარეშეც.

თუ ვისარგებლებთ ცხადი ტოლობით

$$P(AB|C) = P(A|BC) \cdot P(B|C)$$

მაშინ (3.7)-დან ვღებულობთ, რომ

$$P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\mathfrak{B}_k^{\xi}) = P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\xi_k), \tag{3.8}$$

ან

$$P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\xi_0, \cdots, \xi_k) = P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\xi_k). \tag{3.9}$$

ამრიგად, თუ ელემენტარული ხდომილებების $p(\omega)$ "წონები"მოცემულია (3.3) ფორმულით, მაშინ $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n), \quad \xi_i(\omega) = x$ მიმდევრობა ქმნის მარკოვის ჯაჭვს.

განსაზღვრება 3.1 *ვთქვათ,* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *არის რაიმე (სასრული) ალბათური სივრცე და* $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ *არის შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა მნიშვნელობებით (სასრული)* X *სიმრავლეში. თუ შესრულებულია* (3.7) *პირობა, მაშინ* $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ *მიმდევრობას ეწოდება (სასრული) მარკოვის ჯაჭვი.*

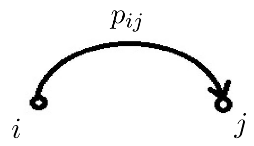
X სიმრავლეს ეწოდება ფაზური სივრცე ან ჯაჭვის მდგომარეობათა სივრცე. ალბათობების ერთობლიობას $(p_0(x)),\ x \in X, \quad p_0(x) = P\{\xi_0 = x\}$ ეწოდება საწყისი განაწილება, ხოლო $\|p_k(x,y)\|$ მატრიცას, $x, y \in X, \quad p_k(x,y) = P\{\xi_k = y|\xi_{k-1} = x\}$ - გადასვლის ალბათობების მატრიცა (x მდგომარეობიდან y მდგომარეობაში) $k = 1, \cdots, n$ მომენტში.

იმ შემთხვევაში, როცა $p_k(x,y)$ გადასვლის ალბათობები არ არის დამოკიდებული k-ზე, $p_k(x,y) = p(x,y)$, მაშინ $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ მიმდევრობას ეწოდება ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი $\|p_k(x,y)\|$ გადასვლის ალბათობების მატრიცით.

შევნიშნოთ, რომ $\|p(x,y)\|$ მატრიცა არის სტოქასტური: მისი ელემენტები არაუარყოფითია და მისი ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტების ჯამი ერთის ტოლია $\sum_y p(x,y) = 1, x \in X$.

ჩავთვალოთ, რომ X ფაზური სივრცე შედგება მთელრიცხვთა წერტილების სასრული სიმრავლისგან ($X = \{0, 1, \cdots, N\}, \quad X = \{0, \pm 1, \cdots, \pm N\}$) და ა.შ., და, ტრადიციის თანახმად, აღვნიშნოთ $p_i = p_0(t)$ და $p_{ij} = p(i,j)$.

გასაგებია, რომ ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვების თვისებები მთლიანად განისაზღვრება p_i საწყისი განაწილებით და p_{ij} გადასვლის ალბათობებით. კონკრეტულ შემთხვევებში ჯაჭვის ევოლუციის აღწერისთვის $\|p_{ij}\|$ მატრიცის ცხადი ამოწერის მაგივრად გამოიყენება (ორიენტირებული) გრაფი, რომლის წვეროებია მდგომარეობები X-დან, ხოლო i მდგომარეობიდან j მდგომარეობაში მიმავალი ისარი

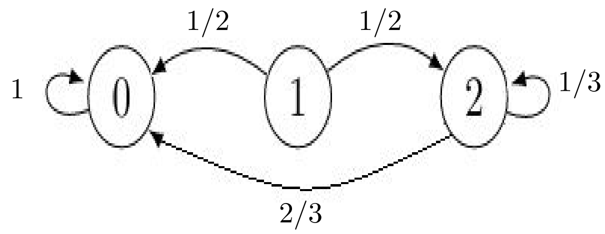


და მასზე p_{ij} რიცხვი გვიჩვენებს, რომ i წერტილიდან j წერტილში გადასვლა შესაძლებელია p_{ij} ალბათობით. იმ შემთხვევაში, როცა $p_{ij} = 0$, შესაბამისი ისარი არ გაივლება.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $X = \{0, 1, 2\}$ და

$$\|p_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ამ მარტიცის შესაბამისი გრაფი იქნება



მაგალითი 2. ვთქვათ, ტაქსის გაჩერებაზე დროის ერთეულებში მოდის მანქანები (ერთი ყოველ მომენტში). თუ გაჩერებაზე არ არის მომლოდინეები, მაშინ მანქანა დაუყოვნებლივ მიდის. აღვნიშნოთ η_k-თი გაჩერებაზე k მომენტში მოსული მომლოდინეების რიცხვი და ვიგულისხმოთ, რომ $\eta_1, \cdots, \eta_n$ არის დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეები. ვთქვათ, ξ_k არის რიგის სიგრძე k მომენტში, $\xi_0 = 0$. მაშინ, თუ $\xi_k = i$, შემდეგ $k+1$ მომენტში რიგის სიგრძე ტოლი იქნება

$$j = \begin{cases} \eta_{k+1}, & \text{თუ} \quad i = 0 \\ i - 1 + \eta_{k+1}, & \text{თუ} \quad i \geq 0. \end{cases}$$

სხვანაირად რომ ვთქვათ,

$$\xi_{k+1} = (\xi_k - 1)^+ + \eta_{k+1}, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

სადაც $a^+ = \max(a, 0)$, და, მაშასადამე, $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ მიმდევრობა ქმნის მარკოვის ჯაჭვს.

3.2. ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი და ერგოდულობის თეორემა, მკაცრად მარკოვის თვისება

აღვნიშნოთ $\xi = (\xi_k, \Pi, P)$-თი **ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი** $\Pi = \|p_i\|$ საწყისი ალბათობების ვექტორით (სტრიქონით) და $P = \|p_{ij}\|$ გადასვლის ალბათობების მატრიცით. ცხადია, რომ

$$p_{ij} = P(\xi_1 = j \,|\, \xi_0 = i) = \cdots = P(\xi_n = j \,|\, \xi_{n-1} = i).$$

აღვნიშნოთ

$$p_{ij}^k = P\{\xi_k = j \,|\, \xi_0 = i\} = P(\xi_{k+l} = j \,|\, \xi_l = i), \quad l = 1, 2, \cdots$$

k ნაბიჯზე i მდგომარეობიდან j მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა და

$$p_j^{(k)} = P\{\xi_k = j\}$$

დროის k მომენტში ნაწილაკის j წერტილში ყოფნის ალბათობა. ვთქვათ, აგრეთვე

$$\Pi^{(k)} = \|p_i^{(k)}\|, \qquad P^{(k)} = \|p_{ij}^{(k)}\|.$$

მაშინ $p_{ij}^{(k)}$ გადასვლის ალბათობები აკმაყოფილებს "კოლმოგოროვ-ჩეპმენის განტოლებას"

$$p_{ij}^{(k+l)} = \sum_\alpha p_{i\alpha}^{(k)} \, p_{\alpha j}^{(l)}, \tag{3.10}$$

ან, მატრიცულ ფორმაში

$$P^{(k+l)} = P^{(k)} \cdot P^{(l)}. \tag{3.11}$$

(3.10) დამოკიდებულების დამტკიცება ეყრდნობა სრული ალბათობის ფორმულას და მარკოვის თვისებას

$$p_{ij}^{(k+l)} = P(\xi_{k+l} = j \,|\, \xi_0 = i) = \sum_\alpha P(\xi_{k+l} = j, \, \xi_k = \alpha \,|\, \xi_0 = i)$$
$$= \sum_\beta P(\xi_{k+l} = j \,|\, \xi_k = \alpha) P(\xi_k = \alpha \,|\, \xi_0 = i) = \sum_\alpha p_{\alpha j}^{(l)} p_{i\alpha}^{(k)}.$$

განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია (3.10) განტოლების შემდეგი ორი კერძო შემთხვევა: შებრუნებული განტოლება

$$p_{ij}^{(l+1)} = \sum_\alpha p_{i\alpha} \, p_{\alpha j}^{(l)} \tag{3.12}$$

და პირდაპირი განტოლება

$$p_{ij}^{(k+1)} = \sum_\alpha p_{i\alpha}^{(k)} \, p_{\alpha j} \tag{3.13}$$

მატრიცულ ფორმაში პირდაპირი და შებრუნებული განტოლებები ჩაიწერება შესაბამისად შემდეგნაირად:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)} \cdot P, \tag{3.14a}$$

$$P^{(k+1)} = P \cdot P^{(k)}. \tag{3.14b}$$

ანალოგიურად $p_i^{(k)}$ (უპირობო) ალბათობებისთვის ვღებულობთ, რომ

$$p_j^{(k+l)} = \sum_\alpha p_\alpha^{(k)} \, p_{\alpha j}^{(l)}, \tag{3.15}$$

ან მატრიცულ ფორმაში,

$$\Pi^{(k+l)} = \Pi^{(k)} \cdot P^{(l)}$$

კერძოდ,

$$\Pi^{(k+1)} = \Pi^{(k)} \cdot P \qquad \text{პირდაპირი განტოლება}$$

და

$$\Pi^{(k+1)} = \Pi^{(1)} \cdot P^{(k)} \qquad \text{შებრუნებული განტოლება.}$$

რადგანაც $P^{(1)} = P, \quad \Pi^{(0)} = \Pi$, ამიტომ

$$P^{(k)} = P^k, \quad \Pi^{(k)} = \Pi \cdot P^k$$

ამრიგად, ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვებისთვის k ნაბიჯზე p_{ij}^k გადასვლის ალბათობები P მატრიცის k-ურ ხარისხების ელემენტებია, ამასთან დაკავშირებით ამ ჯაჭვების ბევრი თვისება შეიძლება შევისწავლოთ მარტიცული ანალიზის მეთოდებით.

მაგალითი. განვიხილოთ ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი 0 და 1 ორი მდგომარეობით და მატრიცით

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}.$$

ძნელი არ არის დავთვალოთ, რომ

$$P^2 = \begin{pmatrix} p_{00}^2 + p_{01}\,p_{10} & p_{01}\,(p_{00}+p_{11}) \\ p_{10}\,(p_{00}+p_{11}) & p_{11}^2 + p_{01}\,p_{10} \end{pmatrix}.$$

და (ინდუქციით)

$$P^n = \frac{1}{2-p_{00}-p_{11}} \begin{pmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{pmatrix} + \frac{(p_{00}+p_{11}-1)}{2-p_{00}-p_{11}} \begin{pmatrix} 1-p_{00} & -(1-p_{00}) \\ -(1-p_{11}) & 1-p_{11} \end{pmatrix}$$

(დაშვებაში, რომ $|p_{00}+p_{11}-1| < 1$).

აქედან ჩანს, რომ თუ P მატრიცის ელემენტები ისეთია, რომ $|p_{00}+p_{11}-1|<1$ (კერძოდ, თუ გადასვლის ყველა p_{ij} ალბათობა დადებითია), მაშინ, როცა $n \to \infty$

$$P^n \to \frac{1}{2-p_{00}-p_{11}} \begin{pmatrix} 1-p_{11} & 1-p_{00} \\ 1-p_{11} & 1-p_{00} \end{pmatrix}, \tag{3.16}$$

და, მაშასადამე,

$$\lim_n p_{i0}^{(n)} = \frac{1-p_{11}}{2-p_{00}-p_{11}}, \qquad \lim_n p_{i1}^{(n)} = \frac{1-p_{00}}{2-p_{00}-p_{11}}.$$

ამრიგად, თუ $|p_{00}+p_{11}-1|<1$, მაშინ განხილული მარკოვის ჯაჭვის ქცევა ექვემდებარება შემდეგ კანონზომიერებას: ნაწილაკის ამა თუ იმ მდგომარეობაში ყოფნის ალბათობაზე საწტისი მდგომარეობის გავლენა ქრება დროის მატებასთან ერთად (p_{ij} იკრიბება π_j ზღვარითი მნიშვნელობებისკენ, რომელიც არ არის დამოკიდებული i-ზე და ქმნის ალბათობების განაწილებას: $\pi_0 \geq 0, \quad \pi_1 \geq 0, \quad \pi_0+\pi_1=1,$); თუ ამასთან ყველა ელემენტი $p_{ij}>0$, მაშინ ზღვარითი მნიშვნელობები $\pi_0>0, \quad \pi_1>0.$

შემდეგი თეორემა აღწერს მარკოვის ჭაჭვების ფართო კლასს, რომელსაც გააჩნია ე.წ. ერგოდულობის თვისება: $\pi_j = \lim_n p_{ij}^{(n)}$ ზღვრები არამარტო არსებობს, არ არის დამოკიდებული i-ზე, ქმნის ალბათობების განაწილებას ($\pi_j \geq 0, \quad \sum_j \pi_j = 1$), არამედ ისეთია, რომ $\pi_0 > 0$ ყველა j-თვის (ასეთ განაწილებებს ეწოდება ერგოდული).

თეორემა 3.2 *(ერგოდულობის თეორემა). ვთქვათ, $P=\|p_{ij}\|$ არის მარკოვის ჯაჭვის გადასვლის ალბათობების მატრიცა მდგომარეობათა სასრული $X=\{1,2,\cdots,N\}$ სიმრავლით.*

a. *თუ რომელიმე n_0-თვის*

$$\lim_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0 \tag{3.17}$$

მაშინ მოიძებნება $\pi_1,\cdots,\pi_n$ რიცხვები თვისებებით

$$\pi_j > 0, \qquad \sum_j \pi_j = 1 \tag{3.18}$$

ისეთი, რომ ყოველი $j \in X$-თვის და ნებისმიერი $i \in X$-თვის

$$p_{ij}^{(n)} \to \pi_j, \qquad n \to \infty. \tag{3.19}$$

b. *პირიქით, თუ არსებობს რიცხვები $\pi_i,\cdots,\pi_n$, რომელიც აკმაყოფილებს* (3.18) *და* (3.19) *პირობებს, მაშინ მოიძებნება ისეთი n_0, რომ შესრულდება პირობა.*

c. *რიცხვი $(\pi_i,\cdots,\pi_n)$ a)-დან აკმაყოფილებს განტოლებათა სისტემას*

$$\pi_j = \sum_\alpha \pi_\alpha p_{\alpha j}, \qquad j=1,\cdots,N. \tag{3.20}$$

დამტკიცება: a). აღვნიშნოთ

$$m_j^{(n)} = \min_i p_{ij}^{(n)}, \quad M_j^{(n)} = \max_i p_{ij}^{(n)}$$

რადგანაც

$$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_\alpha p_{i\alpha}\, p_{\alpha j}^{(n)}, \tag{3.21}$$

ამიტომ

$$m_j^{(n+1)} = \min_i p_{ij}^{(n+1)} = \min_i \sum_\alpha p_{i\alpha}\, p_{\alpha j}(n) \geq \min_i \sum_\alpha p_{i\alpha} \min_\alpha p_{\alpha j}(n) = m_j^{(n)},$$

საიდანაც $m_j^{(n)} \leq m_j^{(n+1)}$, და ანალოგიურად, $M_j^{(n)} \geq M_j^{(n+1)}$. ამიტომ (3.19) დებულების დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0, \quad n \to \infty, j = 1, \cdots, N.$$

ვთქვათ $\varepsilon = \min_{i,j} p_{ij}^{(n_0)} > 0$, მაშინ

$$p_{ij}^{(n_0+n)} = \sum_\alpha p_{i\alpha}^{(n_0)} P_{\alpha j}^{(n)} = \sum_\alpha [p_{i\alpha}^{(n_0)} - \varepsilon p_{j\alpha}^{(2n)}] P_{\beta j}^{(n)} + \varepsilon \sum_\alpha p_{j\alpha}^{(n)} P_{\alpha j}^{(n)}$$

$$= \sum_\alpha [p_{i\alpha}^{(n_0)} - \varepsilon p_{j\alpha}^{(n)}] P_{\alpha j}^{(n)} + \varepsilon p_{jj}^{(2n)}$$

მაგრამ $p_{i\alpha}^{(n_0)} - \varepsilon p_{j\alpha}^{(n)} \geq 0$, ამიტომ

$$p_{ij}^{(n_0+n)} \geq m_j^{(n)} \sum_\alpha [p_{i\alpha}^{(n_0)} - \varepsilon p_{j\alpha}^{(n)}] + \varepsilon p_{jj}^{(2n)} = m_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon\, p_{jj}^{(2n)}$$

და, მაშასადამე,

$$m_j^{(n_0+n)} \geq m_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon\, p_{jj}^{(2n)}.$$

ანალოგიურად

$$M_j^{(n_0+n)} \leq M_j^{(n)}(1-\varepsilon) + \varepsilon\, p_{jj}^{(2n)}.$$

ამ უტოლობების გაერთიანებით ვღებულობთ

$$M_j^{(n_0+n)} - m_j^{(n_0+n)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1-\varepsilon)$$

და, მაშასადამე,

$$M_j^{(kn_0+n)} - m_j^{(kn_0+n)} \leq (M_j^{(n)} - m_j^{(n)})(1-\varepsilon)^k \downarrow 0, \quad k \to \infty.$$

ამრიგად, რომელიღაც $\{n_\beta\}$ ქვემიმდევრობის მიხედვით $M_j^{(n_\beta)} - m_j^{(n_\beta)} \to 0$, როცა $n_\beta \to \infty$. მაგრამ $M_j^{(n)} - m_j^{(n)}$ სხვაობა მონოტონურია n-ით და, მაშასადამე, $M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \to 0$, როცა $n \to \infty$.

თუ აღვნიშნავთ $\pi_j = \lim_n m_j^{(n)}$, მაშინ მიღებული შეფასებებიდან გამომდინარეობს, რომ $n \geq n_0$-თვის

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \leq M_j^{(n)} - m_j^{(n)} \leq (1-\varepsilon)^{[n/n_0]-1},$$

ე.ი. $p_{ij}^{(n)}$-ის კრებადობა π_j ზღვარითი მნიშვნელობისკენ მიმდინარეობს გეომეტრიული სიჩქარით.

ცხადია აგრეთვე, რომ $m_j^{(n)} \geq m_j^{(n_0)} \geq \varepsilon > 0, \quad n > n_0$, და, მაშასადამე $\pi_j > 0$.

b). (3.17) პირობა უშუალოდ გამომდინარეობს (3.19)-დან, რადგანაც მდგომარეობათა რიცხვი სასრულია და $\pi_j > 0$.

c). (3.20) განტოლებები გამომდინარეობს (3.19)-დან და (3.21)-დან. □

განტოლებათა სისტემა

$$x_j = \sum_\alpha x_\alpha P_{\alpha j}, \qquad j = 1, \cdots, N, \tag{3.22}$$

ასრულებს მნიშვნელოვან როლს მარკოვის ჯაჭვების თეორიაში. მის ყოველ ამონახსნს $Q = (q_1, \cdots, q_n)$ რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\sum_\alpha q_\alpha = 1$, ეწოდება სტაციონარული ან ინვარიანტული ალბათობების განაწილება მარკოვის ჯაჭვისთვის $\|p_{ij}\|$ გადასვლის ალბათობებით. ეს სახელწოდება შემდეგნაირად აიხსნება.

ავიღოთ $Q = (q_1, \cdots, q_n)$ განაწილება საწყისი განაწილების როლში, ე.ი. ვთქვათ, $p_j = q_j, \quad j = 1, \cdots, N$. მაშინ

$$p_j^{(1)} = \sum_\alpha q_\alpha \, p_{\alpha j} = q_j$$

და ზოგადად $p_j^{(n)} = q_j$. სხვანაირად რომ ვთქვათ, თუ საწყის განაწილებად ავითებთ $Q = (q_1, \cdots, q_n)$-ს, მაშინ ეს განაწილება დროში არ შეიცვლება, ე.ი. ნებისმიერი k-სთვის

$$P\{\xi_k = j\} = P\{\xi_0 = j\}, \quad j = 1, \cdots, N.$$

უფრო მეტიც $\xi = (\xi \, Q \, P)$ მარკოვის ჯაჭვი ასეთი საწყისი განაწილებით $Q = (q_1, \cdots, q_n)$ იქნება სტაციონარული: $(\xi_k, \xi_{k+1}, , \xi_{k+1})$ ვექტორის ერთობლივი განაწილება არ არის დამოკიდებული k-ზე ნებისმიერი l-სთვის (იგულისხმება, რომ $k + l$).

(3.17) პირობა გარანტირებს როგორც $\pi_j = \lim_n p_{ij}^{(n)}$ ზღვრების არსებობას, რომელიც არ არის დამოკიდებული i-ზე, ისე ერგოდული განაწილების არსებობას, ე.ი $(\pi_1, \cdots, \pi_N)$ განაწილების, $\pi_j > 0$. ამასთან $(\pi_1, \cdots, \pi_N)$ განაწილებაც სტაციონარული განაწილებაა. ვაჩვენოთ, რომ ეს ერთობლიობა $(\pi_1, \cdots, \pi_N)$ არის ერთადერთი სტაციონარული განაწილება.

მართლაც, ვთქვათ $(\tilde{\pi_1}, \cdots, \tilde{\pi_N})$ კიდევ ერთი სტაციონარული განაწილებაა, მაშინ

$$\tilde{\pi_j} = \sum_\alpha \tilde{\pi_\alpha} p_{\alpha j} = \cdots = \sum_\alpha \tilde{\pi_\alpha} p_{\alpha j}^{(n)},$$

და რადგანაც $p_{\alpha j}^{(n)} \to \pi_j$, ამიტომ

$$\tilde{\pi_j} = \sum_{\alpha} (\tilde{\pi_\alpha} \pi_j).$$

შევნიშნავთ, რომ ალბათობების სტაციონარული განაწილება (ამასთან ეთადერთი) შეიძლება არსებობდეს არაერგოდული ჯაჭვებისთვისაც. მართლაც, თუ

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

მაშინ

$$P^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

და ამრიგად $\lim_n p_{ij}^{(n)}$ ზღვრები არ არსებობს. ამავე დროს სისტემა

$$q_j = \sum_{\alpha} q_\alpha p_{\alpha j}, \quad j = 1, 2$$

გადაიქცევა სისტემად

$$q_1 = q_2$$

$$q_2 = q_1$$

რომლის ეთადერთი ამონახსნი (q_1, q_2) რიმელიც აკმაყოფილებს პირობას $q_1 + q_2 = 1$, არის $(1/2, 1/2)$.

3.3. დიდ რიცხვთა კანონი მარკოვის ჯაჭვისათვის

განვიხილოთ ერგოდულობის თეორემიდან გამომდინარე ზოგიერთი შედეგი.

ვთქვათ A არის მდგომარეობათა რაიმე ჯგუფი, $A \subseteq X$ და

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

შემოვიტანოთ სიდიდე

$$\nu_n(n) = \frac{I_A(\xi_0) + \cdots + I_A(\xi_n)}{n+1}$$

- ნაწილაკის მიერ A სიმრავლეში გატარებული დროის წილი. რადგანაც

$$\boldsymbol{E}[I_A(\xi_k)|\xi_0 = i] = P(\xi_k \in A|\xi_0 = i) = \sum_{j \in A} p_{ij}^{(k)} = p_i^{(k)}(A),$$

ამიტომ

$$\boldsymbol{E}[\nu_A(n)|\xi_0 = i = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_i^{(k)}(A)$$

და, კერძოდ

$$\boldsymbol{E}[\nu_{\{j\}}(n)|\xi_0 = i = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} p_{ij}^{(k)}.$$

ანალიზიდან ცნობილია, რომ თუ მიმდევრობა $a_n \to a$, მაშინ $\dfrac{a_0 + \cdots a_n}{n+1} \to a, \quad n \to \infty$. ამიტომ, თუ $p_{ij}^{(k)} \to \pi_j, \quad k \to \infty$, მაშინ

$$\boldsymbol{E}\nu_{\{j\}}(n) \to \pi_j, \quad \boldsymbol{E}\nu_A(n) \to \pi_A, \quad \text{სადაც} \quad \pi_A = \sum_{j \in A} \pi_j.$$

სინამდვილეში ერგოდული ჯაჭვებისთვის შეიძლება დავამტკიცოთ მეტი, სახელდობრ, რომ $I_A(\xi_0), \cdots, I_A(\xi_n), \cdots$ სიდიდეებისთვის სამართლია

დიდ რიცხვთა კანონი. თუ $\xi_0, \xi_1, \cdots$ არის სასრული ერგოდული მარკოვის ჯაჭვი, მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$-სთვის, ნებისმიერი $A \subseteq X$ სიმრავლისთვის და ნებისმიერი საწყისი განაწილებისთვის

$$P\{|\nu_A(n) - \pi_A| > \varepsilon\} \to 0, \qquad n \to \infty. \tag{3.23}$$

დასამტკიცებლად დაგვჭირდება ჩებიშევის უტოლობის (2.20) გამოყენება და ასევე იმის გათვალისწინება, რომ ერგოდული ჯაჭვებისთვის მდგომარეობათა სასრული რიცხვით მოიძებნება ისეთი $0 < p < 1$, რომ

$$|p_{ij}^{(n)} - \pi_j| \le C\,\rho^n. \tag{3.24}$$

განვიხილოთ მდგომარეობები i და j (რომელიც შეიძლება ემთხვეოდეს) და ვაჩვენოთ, რომ $\varepsilon > 0$-სთვის

$$P(|\nu_{\{j\}}(n) - \pi_j| > \varepsilon | \xi_0 = i) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.25}$$

ჩებიშევის უტოლობის ძალით

$$P(|\nu_{\{j\}}(n) - \pi_j| > \varepsilon | \xi_0 = i) \le \frac{\boldsymbol{E}\{|\nu_{\{j\}}(n) - \pi_j|^2 | \xi_0 = i\}}{\varepsilon^2}$$

ამიტომ უნდა ვაჩვენოთ მხოლოდ, რომ

$$\boldsymbol{E}\{|\nu_{\{j\}}(n) - \pi_j|^2 | \xi_0 = i\} \to 0, \quad n \to \infty.$$

უბრალო გამოთვლა გვიჩვენებს, რომ

$$\boldsymbol{E}\{|\nu_{\{j\}}(n) - \pi_j|^2 | \xi_0 = i\} = \frac{1}{(n+1)^2} \boldsymbol{E}\Big\{ \Big[\sum_{k=0}^{n} (I_{\{j\}}(\xi_k) - \pi_j) \Big]^2 | \xi_0 = i \Big\}$$
$$= \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} m_{ij}^{(k,l)},$$

სადაც

$$m_{ij}^{(k,l)} = \boldsymbol{E}\{[I_{\{j\}}(\xi_k)\, I_{\{j\}}(\xi_l)] | \xi_0 = i\} - \pi_j \boldsymbol{E}[I_{\{j\}}(\xi_k) | \xi_0 = i]$$
$$-\pi_j \boldsymbol{E}[I_{\{j\}}(\xi_l) | \xi_0 = i] + \pi_j^2 = p_{ij}^{(s)}\, p_{jj}^{(t)} - \pi_j\, p_{ij}^{(k)} - \pi_j\, p_{ij}^{(l)} + \pi_j^2,$$

$s = \min(k, l)$ და $t = |k - l|$.

(3.24)-ის ძალით,

$$p_{ij}^{(n)} = \pi_j + \varepsilon_{ij}^{(n)}, \qquad |\varepsilon_{ij}^{(n)}| \le C\rho^n.$$

ამიტომ

$$|m_{ij}^{(k,l)}| \le C_1[\rho^s + \rho^t + \rho^k + \rho^l],$$

სადაც C_1 არის რაიმე მუდმივი. ამრიგად

$$\frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} m_{ij}^{(k,l)} \le \frac{C_1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} [\rho^s + \rho^t + \rho^k + \rho^l]$$
$$\le \frac{4C_1}{(n+1)^2} \cdot \frac{2(n+1)}{1-\rho} = \frac{8C_1}{(n+1)(1-\rho)} \to 0, \quad n \to \infty,$$

საიდანაც გამომდინარეობს (3.25) დამოკიდებულობის სამართლიანობა, რომლიდანაც ცხადად გამომდინარეობს საჭირო (3.23) დამოკიდებულება.

ვთქვათ, $\xi = (\xi_0, \xi_1, \cdots)$ არის მარკოვის ჯაჭვი $\|p_{ij}\|$ გადასვლის ალბათობების მატრიცით და $X = \{0, \pm 1, \cdots, \pm N\}$ ფაზური სივრცით. ვთქვათ, A და B არის ორი მთელი რიცხვი, $-N \le$

$A \leq 0 \leq B \leq N$ და $x \in X$. აღვნიშნოთ $\mathfrak{B}_{k+1}$-ით იმ $(x_0, x_1, \cdots, x_k), \quad x_i \in X$ ტრაექტორიების სიმრავლე, რომელიც პირველად გამოდის (A, B) ინტერვალიდან ზედა საზღვარზე, ე.ი. ტოვებს (A, B) სიმრავლეს და $(B, B+1, \cdots, N)$ სიმრავლეში.

დავუშვათ $A \leq x \leq B$-თვის

$$\beta_k(x) = P((\xi_0, \cdots, \xi_k) \in \mathfrak{B}_{k+1} | \xi_0 = x).$$

ამ ალბათობების (მარკოვის ჯაჭვის (A, B) სიმრავლიდან ზედა საზღვარზე პირველი გამოსვლის) პოვნის მიზნით, ვისარგებლოთ შებრუნებული განტოლებების მიღების დროს გამოყენებული მეთოდით.

გვაქვს

$$\beta_k(x) = P((\xi_0, \cdots, \xi_k) \in \mathfrak{B}_{k+1} | \xi_0 = x) = \sum_y p_{xy} P((\xi_0, \cdots, \xi_k) \in \mathfrak{B}_{k+1} | \xi_0 = x, \, \xi_1 = y),$$

სადაც მარკოვის თვისებას და ჯაჭვის ერთგვაროვნებას თუ დავეყრდნობით, ადვილად დავრწმუნდებით

$$P((\xi_0, \cdots, \xi_k) \in \mathfrak{B}_{k+1} | \xi_0 = x, \, \xi_1 = y) = P((x, y, \xi_2, \cdots, \xi_k) \in \mathfrak{B}_{k+1} | \xi_0 = x, \, \xi_1 = y)$$

$$= P((y, \xi_2, \cdots, \xi_k) \in \mathfrak{B}_k | \xi_1 = y) = P((y, \xi_1, \cdots, \xi_{k-1}) \in \mathfrak{B}_k | \xi_0 = y) = \beta_{k-1}(y).$$

ამიტომ $A < x < B$ და $1 \leq k \leq n$-თვის

$$\beta_k(x) = \sum_y p_{xy} \beta_{k-1}(y).$$

ამასთან ცხადია, რომ

$$\beta_k(x) = 1, \qquad x = B, B+1, \cdots, N,$$

$$\beta_k(x) = 0, \qquad x = -N, \cdots, A.$$

ანალოგიურად გამოიყვანება განტოლება $\alpha_k(x)$-თვის ქვედა საზღვარზე (A, B) ინტერვალიდან პირველი გამოსვლის ალბათობებისთვის.

განვიხილოთ მარკოვის თვისების (3.8) ერთი გაძლიერება, კერძოდ, ის სამართლიანი რჩება დროის k მომენტის შეთხვევითი მომენტით შეცვლის დროს.

ვთქვათ, $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ არის ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი $\|p_{ij}\|$ გადასვლის ალბათობების მატრიცით, $\mathfrak{D}^\xi = (\mathfrak{D}_k^\xi)_{0 \leq k \leq n}$ არის დაყოფათა სისტემა, $\mathfrak{D}_k^\xi = \mathfrak{D}_{\xi_0, \cdots, \xi_k}$. აღვნიშნოთ B_k^ξ სიმბოლოთი D_k^ξ დაყოფით წარმოქმნილი ალგებრა $\alpha(D_k^\xi)$.

პირველ ყოვლისა, მარკოვის (3.8) თვისებას მივცეთ სხვა ფორმა. ვთქვათ, B_k^ξ. ვაჩვენოთ, რომ

$$P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1} | B \cap \{\xi_k = a_k\}) = P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1} | \xi_k = a_k). \quad (3.26)$$

(იგულისხმება, რომ $P(B\cap\{\xi_k = a_k\}) > 0$). მართლაც, B სიმრავლე შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$B = \sum^{*}\{\xi_0 = a_0^*, \cdots, \xi_k = a_k^*\},$$

სადაც $\sum^*$ ჯამი აღებულია გარკვეული ერთობლიობით $(a_0^*, \cdots, a_k^*)$. ამიტომ

$$P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|B \cap \{\xi_k = a_k\}) = \frac{P(\{\xi_n = a_n, \cdots, \xi_k = a_k\}| \cap B)}{P(\{\xi_k = a_k\} \cap B)}$$
$$= \frac{\sum^* P(\{\xi_n = a_n, \cdots, \xi_k = a_k\} \cap \{\xi_0 = a_0^*, \cdots, \xi_k = a_k^*\})}{P(\{\xi_k = a_k\} \cap B)}. \tag{3.27}$$

მაგრამ მარკოვულობის თვისების ძალით,

$$P(\{\xi_n = a_n, \cdots, \xi_k = a_k\} \cap \{\xi_0 = a_0^*, \cdots, \xi_k = a_k^*\})$$
$$= \begin{cases} P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\xi_0 = a_0^*, \cdots, \xi_k = a_k^*) \\ \times P\{\xi_0 = a_0^*, \cdots, \xi_k = a_k^*\}, \quad \text{თუ} \quad a_k = a_k^*, \\ 0, \qquad \text{თუ} \quad a_k \neq a_k^*, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\xi_k = a_k) \\ \times P\{\xi_0 = a_0^*, \cdots, \xi_k = a_k^*\} \quad \text{თუ} \quad a_k = a_k^*, \\ 0, \qquad \text{თუ} \quad a_k \neq a_k^*, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\xi_k = a_k) \\ \times P(\{\xi_k = a_k^*\} \cap B) \quad \text{თუ} \quad a_k = a_k^*, \\ 0, \qquad \text{თუ} \quad a_k \neq a_k^*. \end{cases}$$

ამრიგად, $\sum^*$ ჯამი (3.27)-ში ტოლია

$$P(\xi_n = a_n, \cdots, \xi_{k+1} = a_{k+1}|\xi_k = a_k)\, P(\{\xi_k = a_k^*\} \cap B),$$

რაც ამტკიცებს (3.26) ფორმულას.

ვთქვათ, τ გაჩერების მომენტია $(D^\xi = (D_k^\xi))_{0\le k\le n}$ დაფარვათა სისტემის მიმართ.

განსაზღვრება 3.3 *ვიტყვით, რომ B სიმრავლე B_n^ξ ალგებრიდან ეკუთვნის B_τ^ξ სიმრავლეთა სისტემას, თუ ყოველი $0 \le k \le n$-თვის*

$$B \cap \{\tau = k\} \in B_k^\xi \tag{3.28}$$

ძნელი არ არის შევამოწმოთ, რომ ასეთი B სიმრავლეების B_τ^ξ ერთობლიობა ქმნის ალგებრას (რომელსაც ეწოდება τ მომენტამდე დაკვირვებული ხდომილებების ალგებრა).

თეორემა 3.4 *ვთქვათ,* $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ *არის ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი* $\|p_{ij}\|$ *გადასვლის ალბათობების მატრიცით,* τ *არის გაჩერების მომენტი (*D^{ξ}*-ს მიმართ),* $B \in B^{\xi}_{\tau}$ *და* $A = \{\omega : \tau + l \leq n\}$. *თუ* $P\{A \cap \cap (\xi_\tau = a_0)\} > 0$, *მაშინ სრულდება შემდეგი მკაცრად მარკოვის თვისებები:*

$$P(\xi_{\tau+l} = a_l, \cdots, \xi_{\tau+1} = a_1 | A \cap B \cap (\xi_\tau = a_0)) \tag{3.29}$$

$$= P(\xi_{\tau+l} = a_l, \cdots, \xi_{\tau+1} = a_1 | A \cap (\xi_\tau = a_0)), \tag{3.30}$$

და (დაშვებაში $P(A \cap \{\xi_\tau = a_0\})$*)*

$$P(\xi_{\tau+l} = a_l, \cdots, \xi_{\tau+1} = a_1 | A \cap (\xi_\tau = a_0)) = p_{a_0 a_1} \cdots p_{a_{l-1} a_l}. \tag{3.31}$$

სიმარტივისთვის დამტკიცება ჩავატაროთ მხოლოდ $l = 1$ შემთხვევაში. რადგანაც $B \cap (\tau = k) \in B^{\xi}_{k}$, ამიტომ (3.26)-ის თანახმად,

$$P(\xi_{\tau+1} = a_1, A \cap B \cap (\xi_\tau = a_0)) = \sum_{k \leq n-1} P\{\xi_{k+1} = a_1, \xi_k = a_0, \, \tau = k, \, B\}$$

$$= \sum_{k \leq n-1} P(\xi_{k+1} = a_1 | \xi_k = a_0, \, \tau = k, \, B) \, P\{\xi_k = a_0, \, \tau = k, \, B\}$$

$$= \sum_{k \leq n-1} P(\xi_{k+1} = a_1 | \xi_k = a_0) \, P\{\xi_k = a_0, \, \tau = k, \, B\}$$

$$= p_{a_0 a_1} \sum_{k \leq n-1} P\{\xi_k = a_0, \, \tau = k, \, B\} = p_{a_0 a_1} P(A \cap B \cap \{\xi_\tau = a_0\}),$$

რაც ამტკიცებს (3.29)-ს და (3.31)-ს ((3.31)-ის შემთხვევაში საჭიროა ავიღოთ $B = \Omega$).

შენიშვნა 3.5 $l = 1$ *შემთხვევაში მკაცრად მარკოვის* (3.29), (3.31) *თვისება ცხადია ექვივალენტურია იმის, რომ ნებისმიერი* $C \sqsubseteq X$*-თვის*

$$P(\xi_{\tau+1} \in C | A \cap B \cap \{\xi_\tau = a_0\}) = P_{a_0}(C), \tag{3.32}$$

სადაც

$$P_{a_0}(C) = \sum_{a_1 \in C} p_{a_0 a_1}$$

თავის მხრივ (3.32) *ფორმულირების შეცვლა შეიძლება შემდეგნაირად* $A = \{\tau \leq n - 1\}$ *სიმრავლეზე*

$$P(\xi_{\tau+1} \in C | B^{\xi}_{\tau}) = P_{\xi_\tau}(C), \tag{3.33}$$

რაც ერთგვაროვანი მარკოვის პროცესების თეორიაში წარმოადგენს მკაცრად მარკოვის თვისების ერთ-ერთ ჩვეულებრივ გამოყენებად ფორმას.

შენიშვნა 3.6 (3.29) და (3.31) *თვისებები რჩება სამართლიანი (თუ შენიშვნა 3.5-ში აღწერილი შეთანხმებებით ვისარგებლებთ) იმის გარეშეც, რომ $A \cap B \cap \{\xi_\tau = a_0\}$ და $A \cap \{\xi_\tau = a_0\}$ ხდომილებების ალბათობები უნდა იყოს დადებითი.*

ვთქვათ, $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ არის ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვი $\|p_{ij}\|$ გადასვლის ალბათობების მატრიცით,

$$f_{ii}^{(k)} = P(\xi_k = i, \xi_l \neq i,\, 1 \leq l \leq k-1 | \xi_0 = i) \tag{3.34}$$

და $i \neq j$-თვის

$$f_{ii}^{(k)} = P(\xi_k = j, \xi_l \neq j,\, 1 \leq l \leq k-1 | \xi_0 = i) \tag{3.35}$$

არის k მომენტში შესაბამისად i მდგომარეობაში პირველი დაბრუნების და j მდგომარეობაში k მომენტში პირველი მოხვედრის ალბათობები.

ვაჩვენოთ, რომ

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, \quad \text{სადაც} \quad p_{jj}^{0} = (1). \tag{3.36}$$

ამ ფორმულის თვალსაჩინო აზრი ცხადია: n ნაბიჯზე i მდგომარეობიდან j მდგომარეობაში მოხვედრისთვის საჭიროა თავიდან k ნაბიჯზე ($1 \leq k \leq n$) მოვხვდეთ j მდგომარეობაში, ხოლო შემდეგ დარჩენილ $n-k$ ნაბიჯზე j-დან მოვხვდეთ j-ში. მივცეთ მკაცრი ახსნა.

ვთქვათ, j ფიქსირებულია და

$$\tau_j = \min\{1 \leq k \leq n : \xi_k = j\},$$

დაშვებაში $\tau_j = n+1$, თუ $\{\cdot\} = \emptyset$. მაშინ $f_{ij}^{(k)} = P(\tau_j = k | \xi_0 = i)$ და

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = j | \xi_0 = i) &= \sum_{1 \leq k \leq n} P(\xi_n = j, \tau_j = k | \xi_0 = i) \\ &= \sum_{1 \leq k \leq n} P(\xi_{\tau_j + n-k} = j, \tau_j = k | \xi_0 = i), \end{aligned} \tag{3.37}$$

სადაც ბოლო ტოლობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ $\{\tau_j = k\}$ სიმრავლეზე $\xi_{\tau_j+n-k} = \xi_n$. შემდეგ ყოველი $1 \leq k \leq n$-თვის სიმრავლე $\{\tau_j = k\} = \{\tau_j = k,\, \xi_{\tau_j} = j\}$. ამიტომ, თუ $P\{\xi_0 = i,\, \tau_j = k\} > 0$ მაშინ თეორემა 3.4-ის ძალით

$$\begin{aligned} P(\xi_{\tau_j+n-k} = j | \xi_0 = i,\, \tau_j = k) &= P(\xi_{\tau_j+n-k} = j | \xi_0 = i,\, \tau_j = k,\, \xi_{\tau_j} = j) \\ &= P(\xi_{\tau_j+n-k} = j | \xi_{\tau_j} = j) = p_{jj}^{(n-k)} \end{aligned}$$

და, (3.35)-ის თანახმად

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_{\tau_j+n-k} = j | \xi_0 = i,\, \tau_j = k) P(\tau_j = k,\, \xi_0 = i) = \sum_{k=1}^{n} p_{jj}^{(n-k)} f_{ij}^{(k)},$$

რაც ამტკიცებს (3.36) დამოკიდებულებას.

3.4. თეორემა შებრუნებული მიმდევრობის მარკოვისეულობის შესახებ. თეორემა სტოქასტური მატრიცების წრფივი კომბინაციის შესახებ

დავამტკიცოთ შემდეგი **თეორემა სტოქასტური მატრიცების წრფივი კომბინაციის შესახებ.** სანამ თეორემას ჩამოვაყალიბებთ, გავიხსენოთ სტოქასტური მატრიცის განმარტება.

ვიტყვით, რომ $P = \{p_{ij}\}_{n\times n}$ არის სტოქასტური, იგივე მარკოვის მატრიცა, თუ სრულდება შემდეგი ორი პირობა: **a).** მისი ყოველი ელემენტი არაუარყოფითია, $p_{ij} \geq 0$ და **b).** მისი ნებისმიერი სტრიქონის ელემენტების ჯამი ერთის ტოლია, $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \quad i = 1, \cdots, n.$

თეორემა 3.7 *ვთქვათ, $P = \{p_{ij}\}_{n\times n}$ და $Q = \{q_{ij}\}_{n\times n}$ არიან $n\times n$-ზე სტოქასტური მატრიცები. მაშინ მათი ნამრავლი PQ და წრფივი კომბინაცია $\alpha P + (1-\alpha)Q$, სადაც $0 \leq \alpha \leq 1$, აგრეთვე სტოქასტური მატრიცებია.*

დამტკიცება: ჯერ ვაჩვენოთ, რომ ორი სტოქასტური მატრიცის ნამრავლი სტოქასტურია.

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

მაშინ

$$PQ = \begin{pmatrix} p_{11}q_{11} + p_{12}q_{21} + \cdots + p_{1n}q_{n1} & \cdots & p_{11}q_{1n} + p_{12}q_{2n} + \cdots + p_{1n}q_{nn} & \\ p_{21}q_{11} + p_{22}q_{21} + \cdots + p_{2n}q_{n1} & \cdots & p_{21}q_{1n} + p_{22}q_{2n} + \cdots + p_{2n}q_{nn} & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}q_{11} + p_{n2}q_{21} + \cdots + p_{nn}q_{n1} & \cdots & p_{n1}q_{1n} + p_{n2}q_{2n} + \cdots + p_{nn}q_{nn} & \end{pmatrix}$$

მართლაც, ვინაიდან P და Q მატრიცების თითოეული ელემენტი არაუარყოფითია, ამიტომ PQ ნამრავლის მატრიცის თითოეული ელემენტიც ასევე არაუარყოფითი იქნება. ახლა ვაჩვენოთ, რომ PQ-ს ყოველი სტრიქონის ელემენტების ჯამი ერთის ტოლია.

$$\begin{aligned} &(p_{11}q_{11} + p_{12}q_{21} + \cdots + p_{1n}q_{n1}) + \cdots + (p_{11}q_{1n} + p_{12}q_{2n} + \cdots + p_{1n}q_{nn}) \\ &= p_{11}(q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1n}) + \cdots + p_{1n}(q_{n1} + q_{n2} + \cdots + q_{nn}) \\ &= p_{11} + p_{12} + \cdots p_{1n} = 1 \end{aligned}$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ PQ-ს ყოველი სტრიქონის ელემენტების ჯამი ერთის ტოლია, ე.ი. მივიღეთ რომ PQ სტოქასტური, ანუ მარკოვის მატრიცაა.

ახლა ვაჩვენოთ რომ სტოქასტური მატრიცების წრფივი კომბინაცია $\alpha P + (1-\alpha)Q$, სადაც $0 \le \alpha \le 1$ სტოქასტურია. მართლაც, ვინაიდან

$$\alpha P = \begin{pmatrix} \alpha p_{11} & \alpha p_{12} & \cdots & \alpha p_{1n} \\ \alpha p_{21} & \alpha p_{22} & \cdots & \alpha p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha p_{n1} & \alpha p_{n2} & \cdots & \alpha p_{nn} \end{pmatrix},$$

$$(1-\alpha)Q = \begin{pmatrix} (1-\alpha)q_{11} & (1-\alpha)q_{12} & \cdots & (1-\alpha)q_{1n} \\ (1-\alpha)q_{21} & (1-\alpha)q_{22} & \cdots & (1-\alpha)q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (1-\alpha)q_{n1} & (1-\alpha)q_{n2} & \cdots & (1-\alpha)q_{nn} \end{pmatrix},$$

ამიტომ მათი ჯამი იქნება

$$\alpha P + (1-\alpha)Q = \begin{pmatrix} \alpha p_{11} + (1-\alpha)q_{11} & \alpha p_{12} + (1-\alpha)q_{12} & \cdots & \alpha p_{1n} + (1-\alpha)q_{1n} \\ \alpha p_{21} + (1-\alpha)q_{21} & \alpha p_{22} + (1-\alpha)q_{22} & \cdots & \alpha p_{2n} + (1-\alpha)q_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha p_{n1} + (1-\alpha)q_{n1} & \alpha p_{n2} + (1-\alpha)q_{n2} & \cdots & \alpha p_{nn} + (1-\alpha)q_{nn} \end{pmatrix},$$

ვინაიდან $0 \le \alpha \le 1$ და P და Q მატრიცების თითოეული ელემენტი არაუარყოფითია, ამიტომ $\alpha P + (1-\alpha)Q$ წრფივი კომბინაციის მატრიცის თითოეული ელემენტი ასევე არაუარყოფითია. ახლა ვაჩვენოთ, რომ მისი ნებისმიერე სტრიქონის ელემენტების ჯამი ერთის ტოლია.

$$\alpha p_{11} + (1-\alpha)q_{11} + \alpha p_{12} + (1-\alpha)q_{12} + \cdots + \alpha p_{1n} + (1-\alpha)q_{1n}$$

$$= \alpha(p_{11} + p_{12} + \cdots + p_{1n}) + (1-\alpha)(q_{11} + q_{12} + \cdots + q_{1n}) = \alpha + (1-\alpha) = 1$$

ანალოგიურად დამტკიცდება, რომ $\alpha P + (1-\alpha)Q$ წრფივი კომბინაციის მატრიცის ყოველი სტრიქონის ელემენტების ჯამი ერთის ტოლია. ე.ი. $\alpha P + (1-\alpha)Q$ წრფივი კომბინაცია სტოქასტური, იგივე მარკოვის მატრიცია. $\square$

თეორემა 3.8 *თუ $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა წარმოადგენს მარკოვის ჯაჭვს, მაშინ შებრუნებული მიმდევრობაც $(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_0)$ მარკოვის ჯაჭვია.*

დამტკიცება: შემოვიღოთ აღნიშვნა $\eta_i := \xi_{n-i}$, მაშინ $(\eta_0, \eta_1, \cdots, \eta_n)$ მიმდევრობა დაემთხვევა $(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_0)$ მიმდევრობას. თუ გამოვიყენებთ მარკოვის თვისებას (3.5) და პირო-

ბითი ალბათობის განმარტებას, მივიღებთ

$$P(\eta_k = i_k|\eta_{k-1} = i_{k-1}, \cdots, \eta_0 = i_0)$$

$$= \frac{P(\eta_k = i_k, \eta_{k-1} = i_{k-1}, \cdots, \eta_0 = i_0)}{P(\eta_{k-1} = i_{k-1}, \cdots \eta_0 = i_0)} = \frac{P(\xi_n = i_0, \cdots, \xi_{n-k} = i_k)}{P(\xi_n = i_0, \cdots, \xi_{n-k+1} = i_{k-1})}$$

$$= \frac{P(\xi_n = i_0|\xi_{n-1} = i_1)P(\xi_{n-1} = i_1, \cdots, \xi_{n-k} = i_k)}{P(\xi_n = i_0|\xi_{n-1} = i_1)P(\xi_{n-1} = i_1, \cdots, \xi_{n-k+1} = i_{k-1})}$$

$$= \cdots = \frac{P(\xi_{n-k+1} = i_{k-1}, \xi_{n-k} = i_k)}{P(\xi_{n-k+1} = i_{k-1})}$$

$$= P(\xi_{n-k} = i_k|\xi_{n-k+1} = i_{k-1}) = P(\eta_k = i_k|\eta_{k-1} = i_{k-1}).$$

ე.ი. $\xi = (\xi_0, \cdots, \xi_n)$ მიმდევრობის შებრუნებული მიმდევრობაც $(\xi_n, \xi_{n-1}, \cdots, \xi_0)$ მარკოვის ჯაჭვია.

□

თეორემა 3.9 *ვთქვათ, $\xi_0, \xi_1, \cdots$ დამოუკიდებელი, მთელმნიშვნელობიანი შემთხვევითი სიდიდეებია და $P(\xi_n = k) = p_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. დავუშვათ, რომ $\eta_n = \xi_0 + \cdots + \xi_n$, მაშინ η_n მიმდევრობა მარკოვის ჯაჭვია გადასვლის ალბათობათა მატრიცით $p_{ij} = p_{j-i}$.*

დამტკიცება: მარკოვის თვისების თანახმად,

$$P(\eta_n = i_n|\eta_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, \eta_0 = i_0)$$

$$= \frac{P(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1 - i_0, \cdots, \xi_n = i_n - i_{n-1})}{P(\xi_0 = i_0, \xi_1 = i_1 - i_0, \cdots, \xi_{n-1} = i_{n-1} - i_{n-2})}$$

$$= P(\xi_n = i_n - i_{n-1}) = p_{i_n - i_{n-1}}.$$

მეორეს მხრივ,

$$P(\eta_n = i_n|\eta_{n-1} = i_{n-1}) = \frac{P(\xi_0 + \cdots + \xi_n = i_n, \xi_0 + \cdots + \xi_{n-1} = i_{n-1})}{P(\xi_0 + \cdots + \xi_{n-1} = i_{n-1})}$$

$$= \frac{P(\xi_n = i_n - i_{n-1}, \xi_0 + \cdots + \xi_{n-1} = i_{n-1})}{P(\xi_0 + \cdots + \xi_{n-1} = i_{n-1})} = P(\xi_n = i_n - i_{n-1}) = p_{i_n - i_{n-1}}.$$

ამგვარად, $\eta_0, \eta_1, \cdots$ შემთხვევით სიდიდეთ მიმდევრობა მარკოვის ჯაჭვია და გადასვლის ალბათობათა მატრიცა იქნება $p_{ij} = p_{j-i}$. □

განვიხილოთ მარკოვის ჯაჭვთან დაკავშირებული რამდენიმე ამოცანა.

ამოცანა 1. ვაჩვენოთ, რომ თუ მიმდოვრობა ქმნის მარკოვის ჯაჭვს, ზოგადად მისი ნებისმიერი გადანაცვლება არ არის მარკოვის ჯაჭვი.

მართლაც, ვთქვათ $\eta_0 = \xi_1$, $\eta_1 = \xi_0$, $\eta_2 = \xi_2$. მაშინ

$$P(\eta_2 = 1|\eta_1 = 1, \eta_0 = 1) = P(\xi_2 = 1|\xi_0 = 1, \xi_1 = 1) = P_{11} = P(\xi_2 = 1|\xi_1 = 1),$$

$$P(\eta_2 = 1|\eta_1 = 1) = P(\xi_2 = 1|\xi_0 = 1) = P_{11}^{(2)},$$

და თუ $P_{11} \neq P_{11}^{(2)}$, მაშინ

$$P(\eta_2 = 1|\eta_1 = 1, \eta_0 = 1) \neq P(\eta_2 = 1|\eta_1 = 1)$$

ე.ი. არ არის ჯაჭვი.

ამოცანა 2. ვაჩვენოთ, რომ თუ $\xi_0, \xi_1, \cdots$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული მთელმნიშვნელობიანი შემთხვევითი სიდიდეებია, მაშინ ისინი წარმოქმნიან მარკოვის ჯაჭვს. ვიპოვოთ n ნაბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მარტიცი.

რადგანაც $\xi_0, \xi_1, \cdots$ დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია, ამიტომ

$$P(\xi_{n+1} = i_{n+1}|\xi_n = i_n, \cdots, \xi_0 = i_0) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1}) = P(\xi_{n+1} = i_{n+1}|\xi_n = i_n).$$

გარდა ამისა n ნაბიჯზე გადასვლის ალბათობათა მარტიცი იქნება

$$P_{ij}^n = P(\xi_n = j|\xi_0 = i) = P(\xi_n = j) = P(\xi_n = j|\xi_{n-1} = i) = p_{ij}.$$

4 დასკვნა

სამაგისტრო ნაშრომში შესწავლილია შემთხვევით მიმდევრობათა კლასი, რომლებიც წარმოქმნიან მარკოვის ჯაჭვს. განხილულია შემთხვევა, როდესაც შემთხვევითი სიდიდეები ღებულობენ მნიშვნელობებს სასრული ფაზური სივრციდან. ძირითადად განხილულია ერთგვაროვანი მარკოვის ჯაჭვები. ნაშრომი არის კვლევითი ხასიათის და ბოლო ნაწილში მოყვანილია რამდენიმე ძირითადი თეორემა და განხილულია მათთან დაკავშირებული ამოცანები.

ლიტერატურა

1. *ა. შირიაევი*, ალბათობა 1. წიგნი 1, გამომცემლობა - MCCME: Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2004, 1-704.

2. *ვ. ფელერი*, შესავალი ალბათობის თეორიაში და დანართები. ტომი 1, მოსკოვი, 1984, 1-527.