ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ირაკლი სიხარულიძე

ფსევდანალიზურ ფუნქციათა კონა კელერისა და რიმანის მრავალსახეობებზე

მათემატიკის სამაგისტრო პროგრამა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

ხელმძღვანელი - გია გიორგაძე, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო ემცნიერებათა ფაკულტეტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი

2021

სარჩევი

ანოტაცია

რიმანის ზედაპირზე განიხილება განზოგადოებულ ანალიზურ ფუნქციათა და დიფერენციალურ ფორმათა კონები; დამტკიცებულია რამოდენიმე დებულება ღია სიმრავლეებზე მათი კვეთების შესახებ; დახასიათებულია ამ კონათა ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფები. კომპაქტური რიმანის ზედაპირიზე გარკვეული ტიპის განზოგადოებული ანალიზური ფუნქციებისა და დიფერენციალურ ფორმათა კონებისათვის დამტკიცებულია სერის ტიპის დუალობის თეორემა, რომელიც აკავშირებს მოცემული კონათა ნულოვან და პირველ კოჰომოლოგიის ჯგუფებს; ასევე მოყვანილია იმავე ტიპის ფსევდოანალიზური ფუნქციებისათვის რიმან-როხის თეორემის ანალოგის დამტკიცება, რომელიც ეყრდნობა სივრცის ჩეხის კოჰომოლოგიის თვისებებს. მოყვანილი კონსტრუქცია საშუალებას იძლევა ის განზოგადოებულ იქნას ნებისმიერი განზომილების კომპლექსურ მრავალსახეობაზე, რასაც ეძღვნება უკანასკნელი თავი. ზემოხსენებული კონსტრუქციები და დამტკიცებები ახალია.

Abstract

Sheaves of generalized analytic functions and differential forms on a Riemann surface are considered; several propositions regarding them are proven; Čech cohomology groups of these sheaves are characterized. A proof of a Serre-type duality theorem that relates zeroth and first cohomology groups of the sheaf of generalized analytic functions and differential forms on a compact Riemann surface is given along with a proof of an analogue of the Riemann-Roch theorem for pseudoanalytic functions; aforementioned proof utilizes facts about Čech cohomology with values in a sheaf. The way these sheaves are defined makes it possible to consider them on a complex manifold of any dimension. The constrcutions and proofs mentioned above are new.

1 შესავალი

ისეთ ფუნქციათა კლასების შესწავლა, რომელთა თვისებები გარკვეული აზრით [2, 3] ახლოს არის ანალიზური ფუნქციის თვისებებთან, დაიწყო მე-20 საუკუნის დასაყისში პიკარის, კარლემანისა და ტეოდორესკუს შრომებით (იხილეთ [1] და იქ მითითებული ლიტერატურა). მე-20 საუკუნის 50-იან წლებში ლ. ბერსისა [3] და ი. ვეკუას [12] მიერ ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად შემოტანილ იქნა კომპლექსური ცვლადით წარმოებულისა და კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის განზოგადოებები, რითაც საფუძველი ჩაეყარა განზოგადებულ ანალიზურ ფუნქციათა თეორიას, რომელსაც ზოგჯერ ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორიის სახელითაც მოიხსენიებენ. ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორია განვითარებისათვის მთავარ მოტივაციას წარმოადგენდა უწყვეტ გარემოთა მექანიკის ამოცანები.

კომპლექსურ სიბრტყეზე ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა სხვადასხვა თვისებების შესწავლას გასულ საუკუნეში არაერთი შრომა მიეძღვნა; დამტკიცებულ იქნა ლიუვილის, პიკარის, რიმანის თეორემების ანალოგები, შესწავლილი იქნა, აგრეთვე, განზოგადოებული ფუნქციების სასაზღვრო თვისებები, დამტკიცებული იქნა, რომ კვაზიკონფორმული ასახვები ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა კლასს მიეკუთვნება და ა.შ. მე-20 საუკუნის 60-70 წლებში ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორია განზოგადდა ორი მიმართულებით: 1) ერთი ცვლადის ვექტორულმნიშვნელობიანი ფსევდოანალიზური ფუნქციები და 2) მრავალი ცვლადის განზოგადებული ანალიზური ფუნქციები (იხ. [5] და იქ ციტირებული ლიტერატურა). ინტენსიურად ვითარდება კვატერნიონული ფსევდოანალიზური ფუნქციების თეორია.

ფსევდოანალიზური ფუნქციები, როგორც აღინიშნა, ფლობს ანალიზურ ფუნქციათა მრავალ თვისებას, მაგალითად: ფსევდოანალიზურ ფუნქციებს, ისევე როგორც ანალიზურ ფუნქციებს, გააჩნია უნიკალური გაგრძელების თვისება; კომპლექსურ გაწარმოებასა და ინტეგრებას გააჩნია ანალოგები ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა თეორიაში [2, 3].

მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში განიხილება განზოგადოებულ ანალიზური ფუნქციათა და დიფერენციალურ 1-ფორმათა კონები რიმანის ზედაპირზე; ეს კონები განისაზღვრება რიმანის ზედაპირის ანტიჰოლომორფული და ჰოლომორფული კომხები ფიბრაციების გლუვ კვეთებთან მიმართებაში, რაც ერთ-ერთ ძირითად განმას-

ხვავებელ ნიშანს წარმოადგენს მოყვანილი კონსტრუქციისა [11]-ში განხილული კონებისაგან, და რაც საშუალებას იძლევა ეს კონსტრუქცია პირდაპირ იქნას განზოგადოებული ნებისმიერი განზომილების კომპლექსურ მრავალსახეობაზე; დახასიათებულია ამ კონათა ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფები; გამოყოფილია გარკვეული ტიპის განზოგადოებულ ანალიზური ფუნქციათა და დიფერენციალურ 1-ფორმათა კონები, რომელთა კვეთებიც უფრო მდიდარ ალგებრულ სტრუქტურას ფლობს, კერძოდ, ისინი წარმოადგენს $\mathcal{O}_S$-მოდულთა კონებს; ამ ტიპის ფუნქციები და დაფირენციალური ფორმები ყურადსაღებია ასევე იმითაც, რომ, თუმცა ისინი არ არიან ჰოლომორფულნი, მათი გამრავლების შედეგად მიიღება ჰოლომორფული 1-ფორმა - ეს ფაქტი საფუძვლად უდევს დუალობის თეორემის ნაშრომში მოყვანილ დამტკიცებას; განიხილება დივიზორის ჯერადი ამ ტიპის ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა და დიფერენციალურ 1-ფორმათა კონები, რომელთათვისაც დამტკიცებულია დუალობის თეორემა, რომელიც აკავშირებს მათ ნულოვან და პირველ ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფებს; ასევე მათთვის დამტკიცებულია რიმან-როხის თეორემის ანალოგი. კვლევის ძირითად მეთოდს წარმოადგენს კონათა ჩეხის კოჰომოლოგიის თეორია; კერძოდ, კონათა მოკლე ზუსტ მიმდევრობასთან ასოცირებული ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელი მიმდევრობის სიზუსტეს ეყრდნობა ნაშრომში მოყვანილი ორივე ძირითადი თეორემის დამტკიცება.

ნაშრომში გამოყენებული ცნებები და ფაქტები კონათა და კომპლექსურ მრავალსახეობათა თეორიებიდან, [4, 7, 8], მოყვანილია, შესაბამისად, მეორე და მესამე პარაგრაფებში; დანარჩენი პარაგრაფები ეძღვნება კვლევის ძირითადი ობიექტების შესწავლას.

2 კონები

ამ პარაგრაფში მოყვანილია, [4, 7, 8], კონათა თეორიის ის ძირითადი ცნებები და ფაქტები, რომლებიც გამოიყენება შემდგომში.

2.1 განსაზღვრება და მაგალითები

ტოპოლოგიურ სივრცეზე X აბელურ ჯგუფთა კონა $\mathcal{F}$ უსაბამებს X-ის ყოველ ღია სიმრავლეს $U \subseteq X$ აბელურ ჯგუფს $\mathcal{F}(U) \equiv \Gamma(U, \mathcal{F})$, რომლის ელემენტებსაც ეწოდება

$\mathcal{F}$ კონის კვეთები U-ზე, ხოლო ყოველ წყვილს ღია სიმრავლეებისა, რომელთათვისაც $U \subseteq V$, - ჰომომორფიზმს $r_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$, რომელსაც შეზღუდვის ასახვას უწოდებენ, ისე, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

1. $r_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$.
2. ღია სიმრავლეთა ყოველი სამეულისთვის $U \subseteq V \subseteq W$:

$$r_{W,U} = r_{V,U} \circ r_{W,V}.$$

ამ მიმართების ძალით, $\sigma \in \mathcal{F}(V)$- ისთვის $r_{V,U}(\sigma)$-ს ნაცვლად შეიძლება დავწეროთ $\sigma|_U$ ინფორმაციის დაუკარგავად.

3. ყოველი წყვილი ღია სიმრავლეებისათვის $U, V \subseteq X$ და კვეთებისათვის $\sigma \in \mathcal{F}(U), \tau \in \mathcal{F}(V)$, რომელთათვისაც სრულდება

$$\sigma|_{U \cap V} = \tau|_{U \cap V},$$

არსებობს კვეთა $\rho \in \mathcal{F}(U \cup V)$, ისეთი, რომ

$$\rho|_U = \sigma, \quad \rho|_V = \tau.$$

4. თუ $\sigma \in \mathcal{F}(U \cup V)$ და

$$\sigma|_U = \sigma|_V = 0,$$

მაშინ $\sigma = 0$.

მხოლოდ პირველი ორი პირობის შესრულების შემთხვევაში $\mathcal{F}$-ს ეწოდება წინარ-ეკონა. იგი შეიძლება განხილულ იქნას როგორც კონტრავარიანტული ფუნქტორი $\mathcal{F} : \mathfrak{Opn}_X \to \mathfrak{Ab}$ კატეგორიიდან $\mathfrak{Opn}_X$, რომლის ობიექტებსაც წარმოადგენს X ტოპოლოგიური სივრცის ღია სიმრავლეები, რომელთა ერთობლიობაც ჩართვის მიმართებით წარმოადგენს ნაწილობრივ დალაგებულ სიმრავლეს, ხოლო მორფიზმებს კი ჩართვის მიმართებები მათ შორის. სხვა ალგებრულ სტრუქტურებთან დაკავშირებული კონები ანალოგიურად განისაზღვრება.

მაგალითები:

ნებისმიერ გლუვ მრავალსახეობაზე M შეიძლება განვიხილოთ შემდეგი კონები: $C^\infty, C^*, \mathcal{A}^p, \mathcal{Z}^p, \underline{\mathbb{Z}}, \underline{\mathbb{Q}}, \underline{\mathbb{R}}, \underline{\mathbb{C}}$, რომელთათვისაც შეზღუდვის ასახვები პირდაპირ შე-

ზღუდვებს წარმაოდგენს, რომელთა კვეთებიც $U \subseteq M$ ღია სიმრავლეზე წარმოადგენს, შესაბამისად:

$C^\infty(U) = C^\infty$ (ნამდვილმნიშვნელობიანი) ფუნქციები U-ზე,

$C^*(U) = U$-ზე არანულოვანი C^∞ ფუნქციების მულტიპლიკაციური ჯგუფი,

$\mathcal{A}^p(U) = C^\infty$ p-ფორმები U-ზე,

$\mathcal{Z}^p(U) =$ ჩაკეტილი C^∞ p-ფორმები U-ზე,

$\underline{\mathbb{Z}}(U), \underline{\mathbb{Q}}(U), \underline{\mathbb{R}}(U), \underline{\mathbb{C}}(U) =$ ლოკალურად მუდმივი, შესაბამისად, $\mathbb{Z}$-, $\mathbb{Q}$-, $\mathbb{R}$-, $\mathbb{C}$-მნიშვნელობიანი ფუნქციები U-ზე.

2.2 კონათა ჰომომორფიზმები, ფენები, ზუსტი მიმდევრობები

X სივრცეზე კონათა ჰომომორფიზმი $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$ მოიცემა ისეთ ჰომომორფიზმთა ერთობლიობით $\{\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}_{U \in \mathfrak{Opn}_X}$, რომ ყოველი $U \subseteq V \subseteq X$-ისთვის α_U და α_V კომუტირებს შეზღუდვის ასახვებთან, ანუ, სხვა სიტყვებით, შემდეგი დიაგრამა კომუტაციურია:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \\ {\scriptstyle r^{\mathcal{F}}_{V,U}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r^{\mathcal{G}}_{V,U}} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow[\alpha_U]{} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ კონათა ჰომომორფიზმის ბირთვი ეწოდება კონას $\mathrm{Ker}(\alpha)$, რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\mathrm{Ker}(\alpha)(U) = \mathrm{Ker}\left(\alpha_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\right)$, ხოლო შეზღუდვის ასახვები კი ინდუცირებულია $\mathcal{F}$-ისგან. მოცემული შესაბამისობა მართლაც განსაზღვრავს კონას. α-ს კობირთვის განსაზღვრა მეტ სირთულესტან არის დაკავშირებული, ვინაიდან ასახვა $U \mapsto \mathcal{G}(U)/\alpha_U\left(\mathcal{F}(U)\right)$, საზოგადოდ, წარმოადგენს მხოლოდ წინარეკონას. მაგალითად, [7], განვიხილოთ ექსპონენციალური კონათა ასახვა

$$\exp : \mathcal{O} \to \mathcal{O}^*$$

$\mathbb{C} - \{0\}$-ზე, რომელიც განისაზღვება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned} \exp_U :\ & \mathcal{O}(U) \to \mathcal{O}^*(U) \\ & f \mapsto e^{2\pi i f}. \end{aligned}$$

კვეთა $z \in \mathcal{O}^*(\mathbb{C}-\{0\})$ არ არის $\mathcal{O}(\mathbb{C}-\{0\})$-ის ანასახში exp-ის მიმართ, მაგრამ მისი შეზღუდვა ნებისმიერ მოჭიმვად ღია სიმრავლეზე $U \subseteq \mathbb{C}-\{0\}$ არის $\mathcal{O}(U)$-ს ანასახში exp-ის მიმართ. ნაცვლად ამისა, კოზირთვის კონის Coker(α) კვეთა U ღია სიმრავლეზე მოიცემა მისი ისეთი ღია დაფარვითა $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ და კვეთებით $\sigma_\alpha \in \mathcal{G}(U_\alpha)$, რომ ყოველი α, β-სთვის

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha\cap U_\beta} - \sigma_\beta|_{U_\alpha\cap U_\beta} \in \alpha_{U_\alpha\cap U_\beta}\left(\mathcal{F}(U_\alpha\cap U_\beta)\right);$$

ორი ასეთი ერთობლიობა $\{(U_\alpha,\sigma_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ და $\{(U'_{\alpha'},\sigma'_{\alpha'})\}_{\alpha'\in A'}$ გაიგივებულია, თუ ყოველი $p \in U$-სათვის და ყოველი წყვილი ღია სიმრავლეებისათვის $U_\alpha, U'_\beta \ni p$ არსებობს V ღია სიმრავლე, ისეთი, რომ $p \in V \subseteq (U_\alpha \cap U'_\beta)$ და

$$\sigma'_\alpha|_V - \sigma'_\beta|_V \in \alpha_V\left(\mathcal{F}(V)\right).$$

საზოგადოდ, ნებისმიერი წინარეკონა შეიძლება ვაქციოთ კონად, რისთვიაც განვიხილოთ კონის ფენის ცნება.

განსაზღვრება 1. [4, 6], X ტოპოლოგიურ სირცცეზე მოცემული წინარეკონის $\mathcal{F}$ ფენა $x \in X$ წერტილში ეწოდება პირდაპირ, ან ინდუქტიურ, ზღვარს კვეთებისა ღია სიმრავლეებზე, რომლებიც მოიცავს x-ს:

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U\ni x}\mathcal{F}(U) := \left(\bigsqcup_{U\ni x}\mathcal{F}(U)\right)\Big/\underset{x}{\sim},$$

სადაც ექვივალენტობის მიმართება $\underset{x}{\sim}$ განისაზღვრება შემდეგნაირად: $\mathcal{F}(U) \ni \sigma \underset{x}{\sim} \tau \in \mathcal{F}(V)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც არსებობს ღია სიმრავლე $x \in W \subseteq U\cap V$, ისეთი, რომ $r_{U,W}(\sigma) = r_{V,W}(\tau)$.

ნებისმიერი კვეთა $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ ინდუცირებს ელემენტს $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$ ფენიდან ნებისმიერი $x \in U$ წერტილისათვის, ასევე, ნებისმიერი წინარეკონათა ჰომომორფიზმი $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ინდუცირებს ჰომომორფიზმს ფენებზე $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ ნებისმიერი $x \in X$-ისთვის.

განსაზღვრება 2. [8], კონას $\mathcal{F}^+$ ეწოდება ასოცირებული წინარეკონასთან $\mathcal{F}$, თუ $\mathcal{F}^+(U)$ წარმოადგენს ყველა ასახვათა სიმრავლეს $\sigma : U \to \bigcup\limits_{x\in U}\mathcal{F}_x$, რომელთათვისაც $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$

და ყოველი $x \in U$-სათვის არსებობს ღია სიმრავლე $x \in V \subseteq U$ და კვეთა მასზე $\tau \in \mathcal{F}^+(V)$ ისეთი, რომ $\sigma(y) = \tau(y)$ ყოველი $y \in V$-სათვის.

$\mathcal{F}^+$ კონაა და არსებობს ბუნებრივი ჩადგმა $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$.

განსაზღვრება 3. [7], კონათა ჰომომორფიზმთა მიმდევრობას

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

ეწოდება ზუსტი, თუ $\mathcal{E} = \mathrm{Ker}(\beta)$ და $\mathcal{G} = \mathrm{Coker}(\alpha)$. ამგვარ მიმდევრობას ეწოდება კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა; უფრო ზოგადად, კონათა ჰომომორფიზმთა მიმდევრობას

$$\cdots \to \mathcal{F}_n \xrightarrow{\alpha_n} \mathcal{F}_{n+1} \xrightarrow{\alpha_{n+1}} \mathcal{F}_{n+2} \to \cdots$$

ეწოდება ზუსტი, თუ $\alpha_{n+1} \circ \alpha_n = 0$ და

$$0 \to \mathrm{Ker}\,(\alpha_n) \to \mathcal{F}_n \to \mathrm{Ker}\,(\alpha_{n+1}) \to 0$$

ზუსტია ყოველი n-ისთვის.

ყურადსაღებია, რომ, Coker-ის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობის შემთხვევაში, მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{E}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{G}(U) \to 0,$$

საზოგადოდ, არ არის ზუსტი ყოველი $U \in \mathfrak{Opn}_X$-ისთვის; იგი ზუსტია პირველ ორ წევრში; ასევე, კონათა მიმდევრობის სიზუსტიდან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ კვეთისთვის და ყოველი წერტილისათვის $p \in U$, არსებობს U-ში p წერტილის შემცველი ისეთი მიდამო V, ე.ი., $p \in V \subseteq U$, რომ $\sigma|_V \in \beta_V(V)$.

ლემა 1. [8], კონათა ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

ზუსტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ფენათა ჰომომორფიზმების ინდუცი-

რებული მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{E}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{F}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{G}_x \to 0$$

ზუსტია.

მაგალითები:

1. ნებისმიერ კომპლექსურ მრავალსახეუბაზე *ექსპონენციალური კონათა მიმდევრობა*

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \to 0$$

   ზუსტია, სადაც i ჩადგმაა, ხოლო $\exp(f) = e^{2\pi i f}$.

2. პუანკარეს ლემის თანახმად, ნებისმიერ ნამდვილ მრავალსახეობაზე შემდეგი მიმდევრობა

$$0 \to \underline{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}^\infty \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^3 \to \cdots$$

   ზუსტია, სადაც d შეესაბამება გარე დიიფერენცირებას.

3. $\bar{\partial}$-პუანკარეს, ან დოლბოს, ლემის თანახმად, ნებისმიერ კომპლექსურ მრავალსახეობაზე შემდეგი მიმდევრობა

$$0 \to \Omega^p \to \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,2} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,3} \to \cdots$$

   ზუსტია.

2.3 სივრცის ჩეხის კოჰომოლოგია კოეფიციენტებით კონაში

განვიხილოთ კონა $\mathcal{F}$ ტოპოლოგიურ სივრცეზე X. $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ იყოს X-ის ლოკალურად სასრული ღია დაფარვა. განვსაზღვროთ ჯგუფები, [7],

$$C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\alpha \in A} \mathcal{F}(U_\alpha),\ C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\substack{\alpha \neq \beta \\ \alpha, \beta \in A}} \mathcal{F}(U_\alpha \cap U_\beta), \ldots,$$

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = \prod_{\substack{\alpha_0 \neq \alpha_1 \neq \cdots \neq \alpha_p \\ \alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_p \in A}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}).$$

ამგვარად $\sigma \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ წარმოადგენს ასახვას შესაბამისი ინდექსთა სიმრავლიდან $\bigcup_{\substack{\alpha_0 \neq \alpha_1 \neq \cdots \neq \alpha_p \\ \alpha_0, \alpha_1, \cdots \alpha_p \in A}} \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p})$ სიმრავლეში, ისეთს, რომ

$$\sigma(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p) \equiv \sigma_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} \in \mathcal{F}(U_{\alpha_0} \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p}),$$

ხოლო ოპერაცია კი განისაზღვრება წერტილოვნად, ე. ი., $\sigma, \tau \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$-ისთვის

$$(\sigma + \tau)_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} = \sigma_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p} + \tau_{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p}.$$

$\sigma \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$-ს ეწოდება $\mathcal{F}$ კონის p-*კოჯაჭვი* $\mathfrak{U}$ დაფარვის მიმართ. განვსაზღვროთ *კოჯაჭვური ოპერატორი*

$$\delta : C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \to C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$$

$$\sigma \mapsto \delta(\sigma)$$

შემდეგნაირად:

$$(\delta(\sigma))_{i_0, \ldots, i_{p+1}} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \sigma_{i_0, \ldots, \widehat{i_j}, \ldots, i_{p+1}}|_{U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_{p+1}}},$$

სადაც $\widehat{i_j}$ ნიშნავს, რომ შესაბამისი ინდექსი გამოტოვებულია. კერძოდ, $\sigma = \{\sigma_U\} \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$-თვის გვაქვს:

$$(\delta(\sigma))_{U,V} = -\sigma_U|_{U \cap V} + \sigma_V\||_{U \cap V};$$

ხოლო, თუ $\sigma = \{\sigma_{U,V}\} \in C^1(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$, მაშინ

$$(\delta(\sigma))_{U,V,W} = \sigma_{UV}|_{U \cap V \cap W} + \sigma_{VW}|_{U \cap V \cap W} - \sigma_{UW}|_{U \cap V \cap W}.$$

p-კოჯაჭვს $\sigma \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$ ეწოდება *კოციკლი*, თუ $\delta(\sigma) = 0$. ყოველი კოციკლი ანტი-სიმეტრიულია $\sigma_{i_0, \ldots, ip} = -\sigma_{i_0, \ldots, i_{q-1}, i_{q+1}, i_q, i_{q+2}, \ldots, i_p}$. $\sigma \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F})$-ს ეწოდება *კოსაზღვარი*, თუ $\sigma \in \delta(C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}))$. $\delta^2 = 0$, ე.ი., ყოველი კოსაზღვარი კოციკლია, ანუ, გვაქვს შემდეგი კოჯაჭვური კომპლექსი $(C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \delta)$:

$$\cdots \xrightarrow{\delta} C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} C^{p+1}(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

განვსაზღვროთ:

$$Z^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \mathrm{Ker}\delta \subseteq C^p$$

და

$$H^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})}{\delta(C^{p-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}))},$$

რომელსაც ეწოდება *p-ური ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფი*, ან *p-ური კოჰომოლოგიის ჯგუფი კოეფიციენტებით $\mathcal{F}$-ში $\mathfrak{U}$ დაფარვის მიმართ.* განვიხილოთ X-ის ორი დაფარვა $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ და $\mathfrak{U}' = \{U_\beta\}_{\beta\in I'}$; ვიტყვით, რომ $\mathfrak{U}'$ არის $\mathfrak{U}$-ის *გაწვრილება*, თუ ყოველი $\beta \in I'$-თვის არსებობს $\alpha \in I$ ისეთი, რომ $U'_\beta \subseteq U_\alpha$; ამ მიმართებას ღია დაფარვებს შორის აღვნიშნავთ შემდეგნაირად: $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$. თუ $\mathfrak{U}' < \mathfrak{U}$, მაშინ შეიძლება არჩეულ იქნას ასახვა $\varphi : I' \to I$ ისეთი, რომ $U'_\beta \in U_{\varphi(\beta)}$ ყოველი $\beta \in I'$-ისთვის; ეს ასახვა ინდუცირებს ჰომომორფიზმს ρ^p_φ კოჯაჭვებზე

$$\begin{gathered}\rho^p_\varphi : C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to C^p(\mathfrak{U}',\mathcal{F}), \\ \sigma \mapsto \rho^p_\varphi(\sigma)\end{gathered},$$

განსაზღვრულს შემდეგნაირად:

$$(\rho^p_\varphi(\sigma))_{\beta_0,\dots,\beta_p} = \sigma_{\varphi(\beta_0),\dots,\varphi(\beta_p)}|_{U'_{\beta_0}\cap\dots\cap U'_{\beta_p}}.$$

ლემა 2. [7], $\{\rho^p_\varphi\}_{p\in\mathbb{N}}$ ჰომომორფიზმთა ერთობლიობა წარმაოდგენს კოჯაჭვურ კომპლექსთა ჰომომორფიზმს, ანუ, $\delta' \circ \rho^p_\varphi = \rho^{p+1}_\varphi \circ \delta$.

დამტკიცება. განვიხილოთ $\sigma \in C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$; მაშინ ნებისმიერი $\beta_0,\dots,\beta_{p+1} \in I'$-ისთვის

$$\begin{aligned}&(\delta' \circ \rho^p_\varphi(\sigma))_{\beta_0,\dots,\beta_{p+1}} = (\delta'\left(\rho^p_\varphi(\sigma)\right))_{\beta_0,\dots,\beta_{p+1}} = .\sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\left(\rho^p_\varphi(\sigma)\right)_{\beta_0,\dots,\widehat{\beta_j},\dots,\beta_{p+1}}\Big|_{U'_{\beta_0}\cap\dots\cap U'_{\beta_{p+1}}}\\ &= \sum_{j=0}^{p+1}(-1)^j\sigma_{\varphi(\beta_0),\dots,\widehat{\varphi(\beta_j)},\dots,\varphi(\beta_{p+1})}|_{U'_{\beta_0}\cap\dots\cap U'_{\beta_{p+1}}} = (\delta(\sigma))_{\varphi(\beta_0),\dots,\varphi(\beta_{p+1})}|_{U'_{\beta_0}\cap\dots\cap U'_{\beta_{p+1}}}\\ &= (\rho^{p+1}_\varphi \circ \delta(\sigma))_{\beta_0,\dots,\beta_{p+1}},\end{aligned}$$

ანუ, ყოველი $\sigma \in C^p(\mathfrak{U},\mathcal{F})$-ისათვის $\delta' \circ \rho^p_\varphi(\sigma) = \rho^{p+1}_\varphi \circ \delta(\sigma)$, რაც ნიშნავს, რომ $\delta' \circ \rho^p_\varphi = \rho^{p+1}_\varphi \circ \delta$. □

მაშასადამე, გვაქვს ჰომომორფიზმი $(C^\bullet(\mathfrak{U},\mathcal{F}),\delta)$ და $(C^\bullet(\mathfrak{U}',\mathcal{F}),\delta')$ კოჯაჭვურ კომპლექსებს შორის:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\delta} & C^{p-1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1}(\mathfrak{U},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta} & \cdots \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^{p-1}_\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^{p}_\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \rho^{p-1}_\varphi} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\delta'} & C^{p-1}(\mathfrak{U}',\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta'} & C^{p}(\mathfrak{U}',\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta'} & C^{p+1}(\mathfrak{U}',\mathcal{F}) & \xrightarrow{\delta'} & \cdots
\end{array}$$

შესაბამისად, ის ინდუცირებს ჰომომორფიზმებს კოჰომოლოგიის ჯგუფებს შორის. ორი კოჯაჭვური ასახვა $\{\rho^p_\varphi\}_{p\in\mathbb{N}}$ და $\{\rho^p_\psi\}_{p\in\mathbb{N}}$, ინდუცირებული სხვადასხვა ჩადგმის ასახვებით φ და ψ, კოჯაჭვურად ჰომოტოპიურებია და, ამგვარად, ისინი ინდუცირებს ერთსა და იმავე ჰომომორფიზმებს კოჰომოლოგიის ჯგუფებზე

$$\rho^p : H^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \to H^p(\mathfrak{U}',\mathcal{F}).$$

ამგვარად, კოჰომოლოგიის ჯგუფები სხვადასხვა ღია დაფარვების მიმართ მოცემული ხერხით აგებულ ასახვებთან ერთად მათ შორის წარმაოდგენს მიმართულ სისტემას, რის გამოც შესაძლებელია პირდაპირი, ან ინდუქტიური, ზღვრის აღება ღია დაფარვების მიმართ; სწორედ ასე განისაზღვრება X ტოპოლოგიურ სივრცეზე $\mathcal{F}$ კონის p*-ური ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფი*, ან X*-ის* p*-ური კოჰომოლოგიის ჯგუფი კოეფიციენტებით* $\mathcal{F}$ *კონაში*:

$$H^p(X,\mathcal{F}) = \varinjlim_{\mathfrak{U}} H^p(\mathfrak{U},\mathcal{F}).$$

ნულოვანი კოჰომოლოგიის ჯგუფისთვის $\mathfrak{U}$ დაფარვის მიმართ გვაქვს

$$H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) = Z^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

ამგვარად, $H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F})$ არ არის დამოკიდებული დაფარვაზე $\mathfrak{U}$ და გვექნება

$$H^0(X,\mathcal{F}) \cong H^0(\mathfrak{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X).$$

$H^*(X,\mathcal{F})$-ის განსაზღვრება პირდაპირი ზღვრის მეშვეობით ნაკლებად მოსახერხებელია პრაქტიკული თვალსაზრისით; ჩვენ გვჭირდება მარტივი საკმარისი პირობა,

რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ღია დაფარვა $\mathfrak{U}$, იმისათვის, რომ

$$H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) = H^*(X, \mathcal{F}).$$

სწორედ ამგვარ პირობას წარმაოდგენს *აციკლურობა*, რაც წარმოადგენს შემდეგი თეორემის შინაარს:

თეორემა 1 (ლირეის თეორემა). [7], თუ დაფარვა $\mathfrak{U}$ აციკლურია $\mathcal{F}$ კონისთვის, რაც ნიშნავს, რომ

$$H^q(U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_p}, \mathcal{F}) = 0, \quad q > 0,\ \forall i_1, \ldots, i_p,\ p > 0,$$

მაშინ

$$H^*(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \cong H^*(X, \mathcal{F}).$$

კონათა კოჰომოლოგიის ერთ-ერთ უმნიშვნელოვანეს თვისებას წარმოადგენს შემდეგი: თუ გვაქვს მოცემული X სივრცეზე კონათა ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

მაშინ კონათა ჰომომორფიზმები ინდუცირებს ჰომომორფიზმებს კოჯაჭვებს შორის:

$$C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha^p_{\mathfrak{U}}} C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \quad C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^p_{\mathfrak{U}}} C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G}),$$

რომლებიც კომუტირებს კოსაზღვრულ ოპერატორთან, ანუ, კოციკლებს უსაბამებს კოციკლებს, ხოლო კოსაზღვრებს კი - კოსაზღვრებს, და ამგვარად ინდუცირებს ჰომომორფიზმებს

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{E}) \xrightarrow{\bar{\alpha}^p_{\mathfrak{U}}} H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}), \quad H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\bar{\beta}^p_{\mathfrak{U}}} H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G}).$$

ასეთ ჰომომორფიზმთა ერთობლიობა $\bar{\alpha}^p_{\mathfrak{U}}, \bar{\beta}^p_{\mathfrak{U}}$, სადაც $\mathfrak{U}$ გაირბენს X-ის ყველა ლოკალურად სასრულ ღია დაფარვებს, ინდუცირებს შესაბამის ჰომომორფიზმებს კოჰომოლოგიის ჯგუფებზე

$$H^p(X, \mathcal{E}) \xrightarrow{\alpha^{p*}} H^p(X, \mathcal{F}), \quad H^p(X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\beta^{p*}} H^p(X, \mathcal{G}).$$

ავაგოთ მაკავშირებელი ჰომომორფიზმი $\delta^* : H^p(X, \mathcal{G}) \to H^{p+1}(X, \mathcal{E})$ შემდეგნაირად: თუ გვაქვს მოცემული $\sigma \in C^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$, ისეთი, რომ $\delta(\sigma) = 0$, ანუ, $\sigma \in Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{G})$;mapatiet რადგანაც β ეპიმორფიზმია, ყოველთვის შეგვიძლია გადავიდეთ $\mathfrak{U}$-ს გაწვრილებაზე $\mathfrak{U}'$ ისეთზე, რომ მოიძებნოს $\tau \in C^p(\mathfrak{U}', \mathcal{F})$ ისეთი, რომ $\beta^p_{\mathfrak{U}'}(\tau) = \rho(\sigma)$. მაშინ

$$\beta^{p+1}_{\mathfrak{U}'}(\delta(\tau)) = \delta(\beta^p_{\mathfrak{U}'}(\tau)) = \delta(\rho(\sigma)) = \rho(\delta(\sigma)) = 0,$$

ამგვარად, $\delta(\tau)$-ს კომპონენტები β ჰომომორფიზმის ბირთვშია და, შესაბამისად, მიმდევრობის სიზუსტიდან გამომდინარე, ახალ $\mathfrak{U}''$ გ/დაწვრილებაზე გადასვლით , მოიძებნება $\mu \in C^{p+1}(\mathfrak{U}'', \mathcal{E})$ ისეთი, რომ $\alpha^{p+1}_{\mathfrak{U}''}(\mu) = \delta(\tau)$; შესაბამისად, გვექნება

$$\alpha^{p+2}_{\mathfrak{U}''}(\delta(\mu)) = \delta(\alpha^{p+1}_{\mathfrak{U}''}(\mu)) = \delta^2(\tau) = 0$$

და, ვინაიდან α მონომორფიზმია, აქედან გამომდინარეობს, რომ $\delta(\mu) = 0$, ანუ, $\mu \in Z^{p+1}(\mathfrak{U}'', \mathcal{E})$ და, შეგვიძლია განვსაზღვროთ

$$\delta^*([\sigma]) = [\mu] \in H^{p+1}(X, \mathcal{E}).$$

ეს ჰომომორფიზმი კორექტულად არის განსაზღვრული, ვინაიდან ის არ არის დამოკიდებული განსაზღვრის პროცესში გაკეთებულ ამორჩევებზე.

ძირითადი ფაქტი, [7]: *კოჰომოლოგიათა ჯგუფების ინდუცირებული მიმდევრობა*

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(X, \mathcal{E}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \\ &\to H^1(X, \mathcal{E}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \cdots \\ &\qquad\qquad \vdots \\ &\to H^p(X, \mathcal{E}) \to H^p(X, \mathcal{F}) \to H^p(X, \mathcal{G}) \to \cdots \end{aligned}$$

ზუსტია

X სივრცეზე კონათა მიმდევრობასთან

$$0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{G} \to 0$$

ასოცირებული *კოჰომოლოგიის ჯგუფთა მიმდევრობის* გამოყენებით შეიძლება გაე-

ცეს პასუხი კითხვას: თუ არის მოცემული $\mathcal{G}$ კონის გლობალური კვეთა $\sigma \in \mathcal{G}(X) =\to H^0(X, \mathcal{G})$, რა შემთხვევაში არის ის β ჰომომორფიზმის მიმართ ანასახი $\mathcal{F}$ კონის გლობალური კვეთისა? ეს სრულდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $\delta^*(\sigma) = [0] \in H^1(X, \mathcal{E})$.

შემდგომში დაგვჭირდება შემდეგი მნიშვნელოვანი თეორემა:

თეორემა 2. [7],
$$H^p(M, \mathcal{A}^{r,s}) = 0, \quad p > 0.$$

დამტკიცება. M-ის ნებისმიერი ლოკალურად სასრული დაფარვისათვის $\mathfrak{U} = \{\, U_\alpha \,\}_{\alpha \in A}$ მოიძებნება $\mathfrak{U}$-სადმი დაქვემდებარებული ერთეულის დანაწევრება, ანუ, M-ზე განსაზღვრული გლუვი ფუნქციები $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ისეთები, რომ $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \equiv 1$, რომელთა საყრდენებისათვისაც სრულდება პირობა: $\mathrm{supp}(\rho_\alpha) \subseteq U_\alpha$. განვიხილოთ კოციკლი $\sigma \in Z^p(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^{r,s})$ და განვსაზღვროთ კოჯაჭვი $\tau \in C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^{r,s})$ შემდეგნაირად

$$\tau_{\alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha \sigma_{\alpha \alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}},$$

სადაც კვეთა $\rho_\alpha \sigma_{\alpha \alpha_0 \ldots \alpha_{p-1}} \in \mathcal{A}^{r,s}(U_\alpha \cap U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{p-1}})$ გავრცელებულია $U_{\alpha_1} \cap \cdots \cap U_{\alpha_{p-1}}$ სიმრავლეზე ნულით. გვექნება $\delta\tau = \sigma$, ანუ, $\sigma \in \delta(C^{p-1}(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^{r,s}))$, ე.ი.,

$$H^p(\mathfrak{U}, \mathcal{A}^{r,s}) = 0.$$

$p = 1$-ისთვის, მაგალითად, გვექნება $\{\, \sigma_{UV} \in \mathcal{A}^{r,s}(U \cap V) \,\}_{U,V \in \mathfrak{Opn}_M}$ და

$$(\delta\sigma)_{UVW} = \sigma_{UV}|_{U \cap V \cap W} - \sigma_{UW}|_{U \cap V \cap W} + \sigma_{VW}|_{U \cap V \cap W} = 0.$$

ანუ,

$$\sigma_{UV}|_{U \cap V \cap W} = \sigma_{UW}|_{U \cap V \cap W} - \sigma_{VW}|_{U \cap V \cap W} = \sigma_{WV}|_{U \cap V \cap W} - +\sigma_{WU}|_{U \cap V \cap W}.$$

გვენქნება $\tau_U = \sum_{V\in\mathfrak{U}} \rho_V\sigma_{VU}$ და, შესაბამისად,

$$\begin{aligned}(\delta\tau)_{UV} &= -\tau_U|_{U\cap V} + \tau_V|_{U\cap V} = -\sum_{W\in\mathfrak{U}}\rho_W\sigma_{WU} + \sum_{W\in\mathfrak{U}}\rho_W\sigma_{WV}\\ &= \sum_{W\in\mathfrak{U}}\rho_V(\sigma_{WV}-\sigma_{WU}) = \sum_{W\in\mathfrak{U}}\rho_W\sigma_{UV} = \sigma_{UV}.\end{aligned}$$

$\square$

მოცემული შედეგი უფრო ზოგად ხასიათს ატარებს: ის სამართლიანია ნებისმიერი კონისათვის, რომლისთვისაც არსებობს ერთეულის დანაწევრება, ანუ, ყოველი $U = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$-სთვის არსებობს ასახვები $\{\,\eta_\alpha : \mathcal{F}(U_\alpha) \to \mathcal{F}(U)\,\}_{\alpha\in A}$ ისეთი, რომ $\mathrm{supp}(\eta_\alpha\sigma| \subseteq U_\alpha$ და

$$\sum_{\alpha\in A}\eta_\alpha(\sigma|_{U_\alpha}) = \sigma,$$

ყოველი $\sigma \in \mathcal{F}(U)$-ისთვის; ასეთ კონებს ეწოდება *წვრილი* კონები; წვრილია, მაგალითად, გლუვ ფუნქციათა რგოლთა კონა. ასევე ყურადსაღებია, რომ, თუ M-ის ტოპოლოგიური სივრცე ჰომოტოპიურად ექვივალენტურია CW კომპლექსის, მაშინ მისი სინგულარული კოჰომოლოგია იზომორფულია M-ზე მუდმივი კონის $\mathbb{Z}$ ჩეხის კოჰომოლოგიის,

$$H^p(M,\mathbb{Z}) \cong \check{H}^p(M,\mathbb{Z}).$$

3 კომპლექსური მრავალსახეობები

ამ პარაგრაფში მოყვანილია კომპლექსურ მრავალსახეობათა თეორიის ზოგიერთი ცნება და ფაქტი, [7, 8], რომლებიც შემდგომში გამოიყენება.

3.1 განსაზღვრება, ჰოლომორფული და ანტიჰოლომორფული მხები სივცრეები

განსაზღვრება 4. *ჰოლომორფული ატლასი* გლუვ მრავალსახეობაზე M ეწოდება მრავალსახეობის ღია დაფარვას $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ კოორდინატულ ჰომეომორფიზმებთან ერ-

თად $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$, ანუ, ატლასს, $\{ (U_\alpha, \varphi_\alpha) \}_{\alpha \in A}$ ისეთს, რომ გადასვლის ფუნქციები

$$\varphi_{\alpha\beta} \coloneqq \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta)$$

ჰოლომორფულებია.

განსაზღვრება 5. *კომპლექსური მრავალსახეობა* M ეწოდება გლუვ მრავალსახეობას ჰოლომორფული ატლასით. ერთგანზომილებიან კომპლექსურ მრავალსახეობას *რიმანის ზედაპირი* ეწოდება.

განსაზღვრება 6. $U \subseteq M$ ღია სიმრავლეზე განსაზღვრულ ფუნქციას, $f : U \to \mathbb{C}$ ეწოდება *ჰოლომორფული*,თუ $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ ჰოლომორფულია $\varphi_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n$-ზე ყოველი $\alpha \in A$-სათვის; ასახვას კომპლექსურ მრავალსახეობებს შორის $f : M \to N$ ეწოდება *ჰოლომორფული*, თუ N-ზე ლოკალური კოორდინატების მიმართ ის მოიცემა ჰოლომორფული ფუნქციებით.

n-განზომილებიან კომპლექსურ მრავალსახეობას M, როგორც $2n$-განზომილებიან ნამდვილ გლუვ მრავალსახეობას გააჩნია ყოველ წერტილში $p \in M$ *ნამდვილი მხები სივრცე* $T_{\mathbb{R},p}(M)$, რომლის განზომილებაც ლუწია $\dim_{\mathbb{R}} T_{\mathbb{R},p}(M) = 2n$ და ამდენად მას გააჩნია წრფივი კომპლექსური სტრუქტურა, ანუ, ენდომორფიზმი $J_p : T_{\mathbb{R},p}(M) \to T_{\mathbb{R},p}(M)$, ისეთი, რომ $J_p^2 = \mathrm{id}_{T_{\mathbb{R},p}(M)}$. განვიხილოთ მისი კომპლექსიფიკაცია

$$T_{\mathbb{C},p}(M) = T_{\mathbb{R},p}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

და მისი გახლეჩვა წრფივი კომლექსური სტრუქტურის მიმართ

$$T_{\mathbb{C},p}(M) = T_p^{1,0}(M) \oplus T_p^{0,1}(M).$$

განსაზღვრება 7. $T_p^{1,0}(M)$-ს ეწოდება M კომპლექსური მრავალსახეობის *ჰოლომორფული მხები სივრცე* p წერტილში, ხოლო $T_p^{0,1}(M)$-ს კი - *ანტიჰოლომორფული მხები სივრცე* p წერტილში.

3.2 (p,q) ტიპის დიფერენციალური ფორმები, დოლბოს ოპერატორი, დოლბოს კოჰომოლოგია

კომხები სივრცის გახლეჩვის

$$T^*_{\mathbb{C},p}(M) = T_p^{*1,0}(M) \oplus T_p^{*0,1}(M).$$

შესაბამისად გვექნება

$$\bigwedge^n T^*_{\mathbb{C},p}(M) = \bigoplus_{p+q=n} \left(\bigwedge^p T_p^{*1,0}(M) \otimes \bigwedge^q T_p^{*0,1}(M) \right).$$

ამგვარად, n-დიფერენციალურ ფორმათა სივრცისთვის მივიღებთ წარმოდგენას

$$\mathcal{A}^n(M) = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{A}^{p,q}(M).$$

აღვნიშნოთ $\pi^{p,q}$-ით პროექციის ასახვები

$$\mathcal{A}^n(M) \to \mathcal{A}^{p,q}(M)$$

და განვიხილოთ გარე დიფერენცირების ოპერატორი

$$\mathrm{d} : \mathcal{A}^n(M) \to \mathcal{A}^{n+1}(M).$$

(p,q) ტიპის დიფერენციალური ფორმისათვის $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$ გვექნება

$$\mathrm{d}\omega \in \mathcal{A}^{p+1,q}(M) \oplus \mathcal{A}^{p,q+1}(M)$$

განვსაზღვროთ ოპერატორები:

$$\partial : \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p+1,q}(M), \quad \bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(M) \to \mathcal{A}^{p,q+1}(M),$$

შემდეგნაირად

$$\partial := \pi^{p+1,q} \circ \mathrm{d}, \quad \bar{\partial} := \pi^{p,q+1} \circ \mathrm{d};$$

მათ დოლბოს ოპერატორები ეწოდება. შესაბამისად, გვექნება

$$\mathrm{d} = \partial + \bar{\partial}.$$

ლოკალურ კოორდინატებში $z = (z_1, \ldots, z_n)$ (p, q)-ტიპის დიფერენციალური ფორმა $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$ წარმოიდგინება შემდეგნაირად:

$$\omega = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \omega_{IJ} \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J,$$

სადაც ყოველი მულტიინდექსისათვის $I = \{ i_1, \ldots, i_p \}$:

$$\mathrm{d}z_I = \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{i_p}.$$

∂ და $\bar{\partial}$ ოპერატორებისთვის გვექნება:

$$\partial\omega = \sum_{i,I,J} \frac{\partial \omega_{IJ}}{\partial z_i} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J,$$
$$\bar{\partial}\omega = \sum_{j,I,J} \frac{\partial \omega_{IJ}}{\partial \bar{z}_j} \mathrm{d}\bar{z}_j \wedge \mathrm{d}z_I \wedge \mathrm{d}\bar{z}_J.$$

აღვნიშნოთ $Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)$-ით $\bar{\partial}$-ჩაკეტილი (p, q)-ტიპის ფორმები, ანუ, ისეთი ფორმები $\omega \in \mathcal{A}^{p,q}(M)$, რომ $\bar{\partial}\omega = 0$. რადგანაც

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}_j \partial \bar{z}_i},$$

ამიტომ $\bar{\partial}^2 = 0$ და გვაქვს, რომ

$$\bar{\partial}\left(\mathcal{A}^{p,q}(M)\right) \subseteq Z^{p,q+1}_{\bar{\partial}}(M).$$

შესაბამისად, განვსაზღვროთ *დოლბოს კოჰომოლოგიის ჯგუფები*

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M) = \frac{Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(M)}{\bar{\partial}\left(\mathcal{A}^{p,q-1}(M)\right)}.$$

სამართლიანია შემდეგი

თეორემა 3 (დოლბოს თეორემა). [7], M კომპლექსური მრავალსახეობისათვის

$$H^q(M, \Omega^p) \cong H^{p,q}_{\bar{\partial}}(M), \quad p, q > 0.$$

პუანკარეს ლემა უზრუნველყოფს იმას, რომ დე რამის კოჰომოლოგიის ჯგუფები ლოკალურად ტრივიალურებია; ანალოგიურად, დოლბოს კოჰომოლოგიის ჯგუფებისათვის ადგილის აქვს შემდეგ ლემას:

ლემა 3 ($\bar{\partial}$-პუანკარეს ლემა). [7], პოლიდისკისთვის $\Delta \subseteq \mathbb{C}^n$

$$H^{p,q}_{\bar{\partial}}(\Delta) = 0, \quad q \geq 1.$$

3.3 დივიზორები და ჰოლომორფული წრფივი ფიბრაციები

განსაზღვრება 8. M კომპლექსური მრავალსახეობის ანალიზური *ჰიპერზედაპირი* ეწოდება ანალიზურ ალგებრულ ქვემრავალსახეობას (იხილეთ, მაგალითად, [7]) $V \subseteq M$, რომლის კოგანზომილებაც უდრის 1-ს, ანუ $\dim V = \dim M - 1$

განსაზღვრება 9. *დივიზორი* D კომპლექსურ მრავალსახეწობაზე M ეწოდება M-ის დაუყვანად ანალიზურ ჰიპერზედაპირთა ლოკალურად სასრულ ფორმალურ წრფივ კომბინაციას

$$D = \sum_i a_i V_i,$$

სადაც $a_i \in \mathbb{Z}$.

ლოკალურად სასრულობა ნიშნავს, რომ ყოველ წერტილს $p \in M$ გააჩნია, რომელიც დივიზორში შემავალ V_i-თა მხოლოდ სასრულ რაოდენობასთან იკვეთება; თუ M კომპაქტურია, მაშინ ეს ჯამი სასრულია, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ამ თვისების მქონე ღია სიმრავლეებით M-ის დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა. M-ის *დივიზორთა ჯგუფი* $\mathrm{Div}(M)$ ეწოდება M-ზე ყველა დივიზორთა სიმრავლეს ბუნებრივი ჯგუფის სტრუქტურით.

რიმანის ზედაპირის შემთხვევაში, ვინაიდან მისი კომპლექსური განზომილება ტოლია 1-ის, მისი დაუყვანადი ანალიზური ჰიპერზედაპირი, რომლის კოგანზომილება 1-ია, წარმოადგენს წერტილს. ამგვარად, რიმანის ზედაპირის S შემთხვევაში

დივიზორი წარმოადგენს S-ის წერტილთა ფორმალურ წრფივ კომბინაციას

$$D = \sum_k a_k P_k,$$

სადაც $P_k \in S$, ყოველი k-სათვის. დივიზორს ეწოდება ეფექტური, თუ ყოველი k-სათვის $a_k \geq 0$; ამ ფაქტს აღნიშნავენ შემდეგნაირად: $D \geq 0$. კომპაქტურ რიმანის ზედაპირზე $D = \sum_{k=1}^{n} a_k P_k$ დივიზორის *ხარისხი* $\deg(D)$ განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$\deg(D) = \sum_{k=1}^{n} a_k;$$

ის წარმაოდგენს ჯგუფთა ეპიმორფიზმს

$$\deg : \mathrm{Div}(S) \to \mathbb{Z}.$$

3.4 კელერის მრავალსახეობა

განვიხილოთ n-განზომილებიანი კომპლექსური მრავალსახეობა M. *ერმიტული მეტრიკა* M-ზე მოიცემა დადებითად განსაზღვრული ერმიტული სკალარული ნამრავლით

$$h_p : T_p^{1,0}(M) \otimes \overline{T_p^{1,0}(M)} \to \mathbb{C}$$

ყოველ ჰოლომორფულ მხებ სივრცეზე, $p \in M$; ამასთანავე მრავალსახეობის წერტილზე დამოკდიებულება გლუვია, ანუ ის წარმოადგენს $\left(T^{1,0}(M) \otimes \overline{T^{1,0}(M)}\right)^*$ ვექტორული ფიბრაციის გლუვ კვეთას, $h \in \Gamma\left(T^{1,0}(M) \otimes \overline{T^{1,0}(M)}\right)^*$. ვინაიდან

$$h_p \in \left(T_p^{1,0}(M) \otimes \overline{T_p^{1,0}(M)}\right)^* \cong T_p^{*1,0}(M) \otimes T_p^{*0,1},$$

ამიტომ ის ლოკალურად შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც

$$h \equiv \mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} h\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}\bar{z}_j.$$

ერმიტული მეტრიკის ასოცირებული 2-ფორმა ω განისაზღრება შემდეგნაირად

$$\omega_p(u,v) = \mathrm{Re} h_p(iu,v) = \mathrm{Im} h_p(u,v),$$

სადაც $u, v \in T_p^{1,0}(M)$; h მეტრიკა *კელერულია*, თუ მისი ასოცირებული ω 2-ფორმა d-ჩაკეტილი, ე.ი.,

$$\mathrm{d}\omega = 0,$$

რაც ტოლფასია იმისა, რომ ნებისმიერი წერტილის $p \in M$ მიდამოში, z ლოკალურ კოორდინატებში, ერმიტული მეტრიკა წარმოდგენადია შემდეგნაირად

$$h = \mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} + h_{ij})\, \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j,$$

სადაც $h_{ij} = O(\|z\|^2)$ წერტილში p.

განსაზღვრება 10. კომპლექსურ მრავალსახეობას M ერმიტული მეტრიკით h, ანუ, ერმიტულ მრავალსახეობას (M,h), ეწოდება კელერის მრავალსახეობა, თუ h მეტრიკა კელერულია.

რიმანის ზედაპირი ორგანზომილებიანი ნამდვილი მრავალსახეობაა, ამიტომ მისთვის $\mathrm{d}\omega = 0$, ვინაიდან $\mathrm{d}\omega$ 3-ფორმაა; ანუ, ყოველი რიმანის ზედაპირი წარმოადგენს კელერის მრავალსახეობას.

4 ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა და დიფერენციალურ ფორმათა კონები რიმანის ზედაპირზე

4.1 განსაზღვრება, ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა დახასიათება

რიმანის ზედდაპირზე S განვიხილოთ ჰოლომორფულ ფუნქციათა კონის $\mathcal{O}_S$ შემდეგი განზოგადება: განვსაზღვროთ მასზე კონა $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}$, სადაც $\alpha, \beta \in \Gamma(S, \mathcal{A}_S^{0,1})$, რომლის კვეთა $f \in \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$ ღია სიმრავლეზე $U \subseteq S$ წარმოადგენს გლუვ ფუნქციას $f : U \to \mathbb{C}$,

რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\bar{\partial} f = f\alpha|_U + \bar{f}\beta|_U,$$

$\alpha|_U, \beta|_U \in \Gamma(U, \mathcal{A}_S^{0,1})$; შეზღუდვის ჰომომორფიზმები

$$r_{V,U} : \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(V) \to \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U),$$

სადაც $U \subseteq V$, განისაზღვრება ბუნებრივად:

$$\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(V) \ni f \mapsto f|_U.$$

ამ კონას ვუწოდოთ *ფსევდოჰოლომორფულ* ან *ფსევდოანალიზურ* ან *განზოგადოებულ ანალიზურ ფუნქციათა კონა*; გვექნება $\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_S^{0,0}$.

დებულება 1. მოცემული კონსტრუქცია მართლაც წარმაოდგენს კონას.

დამტკიცება. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $f|_U \in \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$. მართლაც

$$\bar{\partial}\left(f|_U\right) = \left(\bar{\partial}(f)\right)\big|_U = \left(f\alpha|_V + \bar{f}\beta|_V\right)\big|_U = \left(f\alpha|_V\right)|_U + \left(\bar{f}\beta|_V\right)\big|_U = f|_U\alpha|_U + \bar{f}|_U\beta|_U.$$

რაც ნიშნავს, რომ $f|_U \in \mathcal{O}_S(U)$. □

დებულება 2. $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}$ წარმოადგენს $\mathbb{R}$-მოდულთა კონას.

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $U \subseteq S$ ღია სიმრავლისათვის $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$ წარმოადგენს $\mathbb{R}(U)$-მოდულს. მართლაც, $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$ აბელური ჯგუფია; $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$-სთვის

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\left(f_1 + f_2\right) &= \bar{\partial} f_1 + \bar{\partial} f_2 = f_1\alpha|_U + \bar{f}_1\beta|_U + f_2\alpha|_U + \bar{f}_2\beta|_U \\ &= \left(f_1 + f_2\right)\alpha|_U + \overline{\left(f_1 + f_2\right)}\beta|_U,\end{aligned}$$

ანუ, $(f_1 + f_2) \in \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$. ნებისმიერი $\lambda \in \mathbb{R}(U)$-სათვის

$$\bar{\partial}\left(\lambda f\right) = \lambda \bar{\partial}\left(f\right) = \lambda\left(f\alpha|_U + \bar{f}\beta|_U\right) = \lambda f\alpha|_U + \lambda\bar{f}\beta|_U = \lambda f\alpha|_U + \overline{\lambda f}\beta|_U,$$

ანუ, $\lambda f \in \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$. მაშასადამე, $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U)$ წარმოადგენს $\mathbb{R}(U)$-მოდულს. □

$\alpha, \beta \in \Gamma(S, \mathcal{A}_S^{0,1})$ გლობალური ფორმებისათვის განვსაზღვროთ კონათა ჰომომორფიზმი

$$\bar{\partial}_{\alpha,\beta} : C_S^\infty \to \mathcal{A}_S^{0,1}$$

შემდეგნაირად: $U \subseteq S$ ღია სიმრავლისათვის და $f \in C_S^\infty(U)$

$$\bar{\partial}_{\alpha,\beta}(f) = \bar{\partial} f - f\alpha|_U - \bar{f}\beta|_U \in \mathcal{A}_S^{0,1}(U).$$

ცხადია, $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta} = \operatorname{Ker} \bar{\partial}_{\alpha,\beta}$. განვიხილოთ S რიმანის ზედაპირზე კონათა მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta} \xrightarrow{i} C_S^\infty \xrightarrow{\bar{\partial}_{\alpha,\beta}} \mathcal{A}_S^{0,1} \to 0.$$

ის ზუსტია; მისი სიზუსტე პირველ ორ წევრში ცხადია, ხოლოდ ის, რომ $\bar{\partial}_{\alpha,\beta} : C_S^\infty \to \mathcal{A}_S^{0,1}$ კონათა ჰომომორფიზმი წარმოადგენს ეპიმოფიზმს, გამომდინარეობს $\bar{\partial}$-პუანკარეს ლემიდან (ლემა 3). ასოცირებული კოჰომოლოგიათა ჯგუფების ზუსტი მიმდევრობისათვის გვექნება

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}) \to H^0(S, C_S^\infty) \to H^0(S, \mathcal{A}_S^{0,1}) \\ &\to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}) \to H^1(S, C_S^\infty) \to H^1(S, \mathcal{A}_S^{0,1}) \to \cdots \end{aligned}$$

ვინაიდან C_S^∞ წვრილი კონაა, ამიტომ

$$H^p(S, C_S^\infty) = 0, \quad p > 0.$$

ასევე, თეორემა 2-ის ძალით,

$$H^p(S, \mathcal{A}_S^{0,1}) = 0, \quad p > 0.$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$H^p(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}) = 0, \quad p > 1.$$

რაც წარმოადგენს თეორემა 2-ის ანალაოგს $\bar{\partial}_{\alpha,\beta}$ ოპერატორისათვის. ასევე, მივიღეთ,

რომ შემდეგი მიმდევრობა ზუსტია

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}) \to H^0(S, C_S^\infty) \to H^0(S, \mathcal{A}_S^{0,1}) \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}) \to 0$$

საიდანაც, პირველი იზომორფიზმის შესახებ თეორემის ძალით, გვაქვს

$$H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}) \cong \frac{H^0(S, \mathcal{A}_S^{0,1})}{\bar{\partial}_{\alpha,\beta}(H^0(S, C_S^\infty))}.$$

ანალოგიურად, $\alpha, \beta \in \Gamma(S, \mathcal{A}_S^{0,1})$-ისთვის შეიძლება განვიხილოთ კონათა ჰომომორფიზმი

$$\bar{\partial}^\star_{\alpha,\beta} : \mathcal{A}_S^{1,0} \to \mathcal{A}_S^{1,1}$$

განსაზღვრული შემდეგნაირად: ღია $U \subseteq S$-ისათვის და $\omega \in \mathcal{A}_S^{1,0}(U)$-სათვის

$$\bar{\partial}^\star_{\alpha,\beta}\omega = -\bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega - \overline{\beta|_U \wedge \omega} \in \mathcal{A}_S^{1,1}(U).$$

აღვნიშნოთ $\Omega_S^{\alpha,\beta} = \operatorname{Ker} \bar{\partial}^\star_{\alpha,\beta}$; ამ კონას ვუწოდოთ *ფსევდოანალიზურ* ან *განზოგადოებულ ანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა*; გვექნება $\Omega_S^{0,0} = \Omega_S^1$, სადაც $\Omega_S^1 \equiv \Omega_S$-ით აღნიშნულია ჰოლომორფულ 1-ფორმათა კონა S რიმანის ზედაპირზე.

დებულება 3. $\Omega_S^{\alpha,\beta}$ წარმაოდგენს $\mathbb{R}$-მოდულთა კონას.

დამტკიცება. ანალოგიურად, ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $U \subseteq S$ ღია სიმრავლისათვის $\Omega_S^{\alpha,\beta}(U)$ წარმოადგენს $\mathbb{R}(U)$-მოდულს;

$$\Omega_S^{\alpha,\beta}(U) = \operatorname{Ker} \bar{\partial}^\star_{\alpha,\beta} : \mathcal{A}_S^{1,0}(U) \to \mathcal{A}_S^{1,1}(U),$$

ხოლო $\mathcal{A}_S^{1,0}(U)$ კი $\mathbb{R}(U)$-მოდულია; მაშასადამე, $\Omega_S^{\alpha,\beta}(U)$-საც გააჩნია იგივე სტრუქტურა. $\square$

განვიხილოთ კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to \Omega_S^{\alpha,\beta} \xrightarrow{i} \mathcal{A}_S^{1,0} \xrightarrow{\bar{\partial}^\star_{\alpha,\beta}} \mathcal{A}_S^{1,1} \to 0.$$

შესაბამისი კოჰომოლოგიის ჯგუფთა ზუსტი მიმდევრობისთვის გვექნება

$$
\begin{aligned}
0 &\to H^0(S,\Omega_S^{\alpha,\beta}) \to H^0(S,\mathcal{A}_S^{1,0}) \to H^0(S,\mathcal{A}_S^{1,1}) \\
&\to H^1(S,\Omega_S^{\alpha,\beta}) \to H^1(S,\mathcal{A}_S^{1,0}) \to H^1(S,\mathcal{A}_S^{1,1}) \to \cdots
\end{aligned}
$$

გავითვალისწინოთ, რომ, თეორემა 2-ის ძალით,

$$H^p(S,\mathcal{A}_S^{1,0}) = H^p(S,\mathcal{A}_S^{1,1}) = 0, \quad p > 0.$$

საიდანაც, პირველი იზომორფიზმის შესახებ თეორემის ძალით,

$$H^p(S,\Omega_S^{\alpha,\beta}) = 0, \quad p > 1.$$

და, ასევე, მივიღებთ ზუსტ მიმდევრობას

$$0 \to H^0(S,\Omega_S^{\alpha,\beta}) \to H^0(S,\mathcal{A}_S^{1,0}) \to H^0(S,\mathcal{A}_S^{1,1}) \to H^1(S,\Omega_S^{\alpha,\beta}) \to 0$$

საიდანაც

$$H^1(S,\Omega_S^{\alpha,\beta}) \cong \frac{H^0(S,\mathcal{A}_S^{1,1})}{\bar{\partial}^{\star}_{\alpha,\beta}(H^0(S,\mathcal{A}_S^{1,0}))}.$$

4.2 დივიზორის ჯერადი ფსევდოანალიზური ფუნქციები და დიფერენციალური ფორმები

განვიხილოთ $U \subseteq S$ ღია სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქცია $f : U \to \mathbb{C}$, რომელიც U-ზე ფსევდოჰოლომორფულია ყველგან, გარდა, შესაძლოა, იზოლირებულ წერტილთა ერთობლიობისა, რომლებშიც მას შეიძლება გააჩნდეს პოლუსის ტიპის განსაკუთრებულობა; ანუ, ე.ი., $f \in \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U \backslash U')$, სადაც U' შეიცავს მხოლოდ იზოლირებულ წერტილებს, ანუ, ის წარმაოდგენს დისკრეტულ სიმრავლეს. ამგვარ ფუნქციათა ერთობლიობა აღვნიშნოთ $\tilde{\mathcal{O}}_S^{\alpha,\beta}(U)$-ით. ყოველი ასეთი ფუნქცია განსაზღვრავს დივიზორს

$$(f) \coloneqq \sum_n \mathrm{ord}_{p_n}(f) \cdot p_n,$$

სადაც ჯამი აიღება f ფუნქციის ნულთა და პოლუსთა სიმრავლეზე, ხოლო $\mathrm{ord}_{p_n}(f) = k$, თუ p_n არის k რიგის ნული, და $\mathrm{ord}_{p_n}(f) = -k$, თუ p_n არის k რიგის პოლუსი; მას

ეწოდება f-ის დივიზორი. ვიტყვით, რომ f ჯერადია $-D$ დივიზორის, თუ $(f) \geq -D$, ანუ, f-ის დივიზორისა და D-ს ჯამი ეფექტური დივიზორია

$$(f) + D \geq 0.$$

ანალოგიურად განისაზღვრება პოლუსების მქონე ფსევდოჰოლომორფულ დიფერენციალურ ფორმათა ერთობლიობა $\tilde{\Omega}_S^{\alpha,\beta}(U)$; ასევე, ყოველი $\omega \in \tilde{\Omega}_S^{\alpha,\beta}(U)$ განსაზღვრავს დივიზორს

$$(\omega) \coloneqq \sum_n \mathbf{ord}_{p_n}(\omega) \cdot p_n,$$

სადაც $\mathbf{ord}_{p_n}(\omega) \coloneqq \mathbf{ord}_{p_n}(f)$; აქ $\omega = f\mathrm{d}z$ ლოკალური z კოორდინატის მიმართ; ეს განსაზღვრება ინვარიანტულია კოორდინატული გარდაქნების მიმართ და, შესაბამისად, კორექტულია; ჯამი აიღება ω ფორმის ნულთა და პოლუსთა სიმრავლეზე.

ყოველ დივიზორთან $D \in \mathrm{Div}(S)$ გვაქვს ასოცირებულია კონები $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(D)$ და $\Omega_S^{\alpha,\beta}(D)$, რომელთა კვეთებიც $U \subseteq S$ ღია სიმრავლეზე მოიცემა შემდეგნაირად:

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(D)) = \{\, f \in \mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(U) \mid (f) + D \geq 0 \,\},$$

$$\Gamma(U, \Omega_S^{\alpha,\beta}(D)) = \{\, \omega \in \Omega_S^{\alpha,\beta}(U) \mid (\omega) + D \geq 0 \,\}.$$

მომდევნო თავებში განიხილება $\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)$ და $\Omega_S^{\alpha,0}(D)$ კონები, რომელთა კვეთებსაც უფრო მდიდარი ალგებრული სტრუქტურა აქვთ.

დებულება 4. კონები $\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)$ და $\Omega_S^{\alpha,0}(D)$ წარმოადგენს $\mathcal{O}_S$-მოდულებს.

დამტკიცება. ნებისმიერ $U \subseteq S$ ღია სიმრავლისათვის $\Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$ და $\Gamma(U, \Omega_S^{\alpha,0}(D))$ წარმოადგენენ აბელურ ჯგუფებს. კვეთებისათვის $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$ და $h \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S)$

$$\bar{\partial}_{\alpha,0}(hf) = \bar{\partial}(hf) - (hf)\alpha|_U = h\bar{\partial}(f) - h(f\alpha|_U) = h(\bar{\partial}(f) - (f\alpha|_U)) = h\bar{\partial}_{\alpha,0}(f) = 0,$$

ანუ, $hf \in \Gamma(U, \mathrm{Ker}\bar{\partial}_{\alpha,0}) = \Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$; ამგვარად, $\Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$ არის $\mathcal{O}_S(U)$-მოდული.

ანალოგიურად, $\omega \in \Gamma(U, \Omega_S^{\alpha,0}(D))$ კვეთისთვის გვექნება

$$\bar{\partial}^{\star}_{\alpha,0}(h\omega) = -\bar{\partial}(h\omega) - \alpha|_U \wedge (h\omega) = h\bar{\partial}^{\star}_{\alpha,\beta}(\omega) = 0,$$

ე.ი., $h\omega \in \Gamma(U, \mathrm{Ker}\bar{\partial}^{\star}_{\alpha,0}) = \Gamma(U, \Omega^{\alpha,0}_S(D))$; მაშასადამე, $\Gamma(U, \Omega^{\alpha,0}_S(D))$ წარმოადგენს $\mathcal{O}_S(U)$-მოდულს; კერძოდ, $\mathcal{O}^{\alpha,0}_S(D)$ და $\Omega^{\alpha,0}_S(D)$ კონები წარმოადგენს წრფივ სირვცეთა კონებს $\mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ. □

5 დუალობის თეორემა

განვიხილოთ კონები $\mathcal{O}^{\alpha,0}_S(D)$ და $\Omega^{\alpha,0}_S(-D)$. კვეთების $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}^{\alpha,\beta}_S(D))$ და $\omega \in \Gamma(U, \Omega^{\alpha,\beta}_S(-D))$-ს გამრავლების შედეგად მივიღებთ ჰოლომორფულ 1-ფორმას; მართლაც,

$$\bar{\partial}\,(f\omega) = (\bar{\partial} f) \wedge \omega + f\bar{\partial}\omega = f\alpha|_U \wedge \omega + f(-\alpha \wedge \omega) = f(\alpha \wedge \omega) - f(\alpha \wedge \omega) = 0,$$

ხოლო დივიზორისთვის $(f\omega)$ კი გვექნება

$$(f\omega) = (f) + (\omega) \geq D - D = 0;$$

ანუ, $f\omega \in \Omega_S(U)$. ამგვარად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ ორადწრფივი ასახვა

$$\Gamma(U, \mathcal{O}^{\alpha,0}_S(D)) \times \Gamma(U, \Omega^{\alpha,0}_S(-D)) \to \Gamma(U, \Omega_S),$$

$$(f, \omega) \mapsto f\omega,$$

ის ინდუცირებს ორადწრფივ ასახვას

$$H^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^{\alpha,0}_S(D)) \times H^0(\mathfrak{U}, \Omega^{\alpha,0}_S(-D)) \to H^1(\mathfrak{U}, \Omega_S),$$

$$([f], \omega) \mapsto [f\omega]$$

ნებისმიერი $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ღია დაფარვისათვის.

დებულება 5. მოცემული ორადწრფივი ასახვა კორექტულად არის განსაზღვრული.

დამტკიცება. განვიხილოთ კოციკლი $f \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}^{\alpha,0}_S(D))$ და გლობალური კვეთა $\omega \in H^0(\mathfrak{U}, \Omega^{\alpha,0}_S(-D))$. განვსაზღვროთ კოჯაჭვი $f\omega \in C^1(\mathfrak{U}, \Omega_S)$ შემდეგნაირად

$$(f\omega)_{ij} \coloneqq \{f_{ij}\omega|_{U_i \cap U_j}\}_{i,j \in I} \in \Omega_S(U_i \cap U_j);$$

ვაჩვენოთ, რომ ის წარმაოდგენს კოციკლს:

$$
\begin{aligned}
(\delta(f\omega))_{ijk} &= (f_{ij}\omega|_{U_i\cap U_j})|_{U_i\cap U_j\cap U_k} - (f_{ik}\omega|_{U_i\cap U_k})|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + (f_{jk}\omega|_{U_j\cap U_k})|_{U_i\cap U_j\cap U_k} \\
&= (f_{ij}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} - f_{ik}|_{U_i\cap U_j\cap U_k} + f_{jk}|_{U_i\cap U_j\cap U_k})\omega|_{U_i\cap U_j\cap U_k} = (\delta f)_{ijk}\omega|_{U_i\cap U_j\cap U_k} = 0,
\end{aligned}
$$

ანუ, $f\omega \in Z^1(\mathfrak{U}, \Omega_S)$.

განვიხილოთ f-ის კოჰომოლოგიური კოციკლი $f' \in Z^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$, რაც ნიშნავს, რომ არსებობს ისეთი კოჯაჭვი $g \in C^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$, რომ

$$
f'_{ij} - f_{ij} = g_j - g_i.
$$

$f\omega$-ისა და $f'\omega$-ის კოჰომოლოგიურებია; მართლაც:

$$
\begin{aligned}
&(f\omega)_{ij} - (f'\omega)_{ij} = f'_{ij}\omega|_{U_i\cap U_j} - f_{ij}\omega|_{U_i\cap U_j} = (f'_{ij} - f_{ij})\omega|_{U_i\cap U_j} = (g_j|_{U_i\cap U_j} - g_i|_{U_i\cap U_j})\omega|_{U_i\cap U_j} \\
&= g_j|_{U_i\cap U_j}\omega|_{U_i\cap U_j} - g_i|_{U_i\cap U_j}\omega|_{U_i\cap U_j} = (g_j\omega|_{U_j})|_{U_i\cap U_j} - (g_i\omega|_{U_i})|_{U_i\cap U_j} = (\delta(g\omega))_{ij},;
\end{aligned}
$$

სადაც $g\omega \equiv \{g_i\omega|_{U_i}\}_{i\in I} \in C^0(\mathfrak{U}, \Omega_S^{\alpha,0})$; ანუ

$$
f'\omega - f\omega \in \delta(C^0(\mathfrak{U}, \Omega_S^{\alpha,0}),
$$

მაშასადამე $[f\omega] = [f'\omega] \in H^1(\mathfrak{U}, \Omega_S)$ და ბიწრფივი ასახვა $([f], \omega) \mapsto [f\omega]$ კორექტულად არის განსაზღვრული. □

ინდუქიტიურ ზღვარზე გადასვლით მივიღებთ ორადწრფივ ასახვას

$$
H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \times H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) \to H^1(S, \Omega_S),
$$

$$
([f], \omega) \mapsto [f\omega].
$$

კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$
0 \to \Omega_S \to \mathcal{A}^{1,0} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathcal{A}^{1,1} \to 0
$$

მოგვცემს, $\mathcal{A}^{1,0}$ და $\mathcal{A}^{1,1}$ კონების სიწვრილის ძალით, ზუსტ მიმდევრობას

$$0 \to H^0(S, \Omega_S) \to H^0(S, \mathcal{A}^{1,0}) \to H^0(S, \mathcal{A}^{1,1}) \to H^1(S, \Omega_S) \to 0,$$

რომლის სიზუსტისა და იზომორფიზმის შესახებ პირველი თეორემის ძალით, გვექნება

$$H^1(S, \Omega_S) \cong \frac{\mathcal{A}_S^{1,1}(S)}{\mathrm{d}(\mathcal{A}_S^{1,0}(S))}.$$

ასახვა, რომელიც ამყარებს ამ იზომორფიზმს, აღვნიშნოთ ϕ-ით; მისი მეშვეობით განვსაზღვროთ წრფივი ასახვა $H^1(S, \Omega_S) \to \mathbb{C}$:

$$H^1(S, \Omega_S) \ni \omega \mapsto \frac{1}{2\pi i} \int_S \eta,$$

სადაც $\eta \in \mathcal{A}_S^{1,1}(S)$ არის მოცემული იზომორფიზმით ω-ს შესაბამისი ექვივალენტობის კლასის წარმომადგენელი, ანუ $\phi(\omega) = [\eta]$; მოცემული ასახვა კორექტულად არის განსაზღვრული, ვინაიდან ნებისმიერი $\xi \in \mathcal{A}_S^{1,0}(S)$-ისთვის

$$\frac{1}{2\pi i} \int_S (\eta + \mathrm{d}\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_S \eta + \frac{1}{2\pi i} \int_S \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_S \eta.$$

ასახვათა კომპოზიცია

$$H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \times H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) \to H^1(S, \Omega_S) \to \mathbb{C}$$

მოგვცემს ბიწრფივ ასახვას

$$H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \times H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) \to \mathbb{C},$$

$$([f], \omega) \mapsto \langle [f], \omega \rangle,$$

სადაც

$$\langle [f], \omega \rangle := \frac{1}{2\pi i} \int_S \eta \in \mathbb{C}, \quad \eta \in \phi([f\omega])$$

თეორემა 4. $([f], \omega) \mapsto \langle [f], \omega \rangle$ ორადწრფივი ასახვა არაგადაგვარებულია.

დამტკიცება. განვიხილოთ კვეთები $[f] \in H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$ და $\omega \in H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D))$-სათვის

განვიხილოთ
$$\langle [f], \omega \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_S \eta = 0, \quad \eta \in \phi([f\omega]).$$
რადგანაც S ორგანზომილებიანი ორიენტირებადი გლუვი მრავალსახეობაა, ხოლო $\eta \in \mathcal{A}_S^{1,1}(S)$ კი 2-ფორმაა, ამიტომ [10] მოცემული ინტეგრალის ნულობიდან გამომდინარეობს η-ს სიზუსზე, ანუ, $\eta \in \mathrm{d}(\mathcal{A}_S^{1,0}(S))$; მაშასადამე

$$\phi([f\omega]) = 0.$$

ვინაიდანაც ϕ იზომორფიზმია, მისი ბირთვი ტრივიალურია, ამიტომ

$$[f\omega] = 0 \in H^1(S, \Omega_S),$$

რაც, ω-ს გლობალურობიდან გამომდინარე, შესაძლებელია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $[f] = 0 \in H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$ ან $\omega = 0 \in H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) \to H^1(S, \Omega_S)$; ეს კი ნიშნავს, რომ მოცემული ორადწრფივი ასახვა არაგადაგვარებულია. $\square$

ამ თეორემის მეშვეობით შეგვიძლია დავამტკიცოთ შემდეგი

თეორემა 5 (დუალობის თეორემა). $H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) \cong (H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)))^*$

დამტკიცება. თეორემა 4-იდან გამომდინარეობს, რომ $\dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D))$ და რომ წრფივი ასახვის

$$H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) \to (H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)))^*,$$
$$\omega \mapsto ([f] \mapsto \langle [f], \omega \rangle),$$

ბირთვი ტრივიალურია, ანუ, ის ინექციურია; ასევე, ვიცით, რომ

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) = \dim_{\mathbb{C}} (H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)))^*,$$

რაც ნიშნავს, რომ ეს წრფივი ასახვა ასევე სურექციულიც არის; მაშასადამე ის ამყარებს იზომოროფიზმს

$$H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(-D)) \cong (H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)))^*.$$

$\square$

6 რიმან-როხის თეორემა

$P \in S$ რიმანის ზედაპირის წერტილისათვის $\mathbb{C}_P$-ით აღვნიშნოთ ცათამბრჯენი კონა, ანუ, კონა S-ზე, რომელიც $U \ni P$-ს უსაბამებს $\mathbb{C}$-ს, $\mathbb{C}_P(U) = \mathbb{C}$, ხოლო წინააღმდეგ შემთხვევასი კი, ანუ, თუ U არ შეიცავს P წერტილს, $P \notin U$, $\mathbb{C}_P(U) = \{0\}$. მისი კოჰომოლოგიის ჯგუფებისათვის გვექნება $H^0(S, \mathbb{C}_P) \cong \mathbb{C}$, ხოლო ყოველი $n > 0$-ისთვის კი - $H^n(S, \mathbb{C}_P) = 0$. ნებისმიერი $P \in S$ წერტილი შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც ერთწევრიანი დივიზორი, და ნებისმიერი $D \in \mathrm{Div}(S)$-ისთვის $D \leq D + P$. გვაქვს ბუნებრივი მონომორფიზმი $\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D) \to \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)$, ვინაიდან, თუ

$$(f) + D \geq 0,$$

მაშინ მითუმეტეს

$$(f) + D + P \geq 0.$$

განვიხილოთ $P \in S$ წერტილის ირგვლივ ლოკალური კოორდინატული რუქა, (U, φ), ე.ი., $P \in U$ და $\varphi(P) = 0$. ამ კოორდინატის მიმართ $\bar{\partial}_{\alpha,\beta} f = 0$-ის ამონახსნი P-ის მიდამოში, როგორც ცნობილია, ჩაიწერება შემდეგნი სახით

$$\hat{f}(z) = \phi(z) \exp\left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi(U)} a(w) \, \frac{\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}}{w - z} \right\},$$

სადაც $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ არის f ფუნქციის კოორდინატული წარმოდგენა მოცემული კოორდინატული სისტემის მიმართ, ϕ მერომორფული ფუნქციაა, ხოლო $a\mathrm{d}\bar{z} = \varphi^* \alpha$. თუ $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P))$, მაშინ ϕ-ის $z = \varphi(P) = 0$ წერტილში შესაძლებელია გააჩნდეს პოლუსი არაუმეტეს მოცემული დივიზორით განსაზღვრული რიგისა, ამიტომ მის ლორანის მწკრივს ექნება სახე

$$\phi(z) = \sum_{n=-k-1}^{\infty} c_n z^n,$$

სადაც k არის D დივიზორის P წერტილთან მდგომი კოეფიციენტი.

განვსაზღვროთ ასახვა $\epsilon_U : \Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) \to \mathbb{C}_P(U)$ შემდეგნაირად: თუ $P \in U$, მაშინ

$$\epsilon_U(f) \coloneqq c_{-k-1}.$$

ეს ასახვა წარმოადგენს ჰომომორფიზმს; მართლაც, განვიხილოთ $f_1, f_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P))$, მაშინ $f = f_1 + f_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P))$-ისთვის გვექნება

$$\hat{f}(z) = \hat{f}_1(z) + \hat{f}_2(z) = \phi_1(z) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi(U)} a(w)\,\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}}{w-z}\right\}$$
$$+\,\phi_2(z) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi(U)} a(w)\,\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}}{w-z}\right\} = (\phi_1(z)+\phi_2(z)) \exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi(U)} a(w)\,\frac{\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}\bar{z}}{w-z}\right\},$$

ე.ი.,

$$\epsilon_U(f) = \epsilon_U(f_1) + \epsilon_U(f_2).$$

ასევე, ცხადია, ის სურექციულიც არის; მაშასადამე, $\{\epsilon\}_{U\in\mathfrak{Opn}_S}$ ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა წარმაოდგენს კონათა ეპიმორფიზმს, $\mathcal{O}_S^{\alpha,\beta}(D+P) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}_P$. განვიხილოთ კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D) \to \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}_P \to 0$$

და შესაბამისი კოჰომოლოგიის ჯგუფთა ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D{+}P)) \to \mathbb{C} \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D{+}P)) \to 0$$

განსაზღვრება 11. S კომპაქტური რიმანის ზედაპირის *გვარი* g შეიძლება განსაზღვრულ იქნას შემდეგნაირად:

$$g(S) \coloneqq \dim H^1(S, \mathcal{O}).$$

ის ემთხვევა ზედაპირის ტოპოლოგიურ გვარს

$$g(S) = \frac{b_1(S)}{2} = \frac{-\chi(S)+2}{2},$$

სადაც $b_1(S)$ არის S-ის პირველი ბეტის რიცხვი, ხოლო $\chi(S)$ კი - მისი ეილერის მახა-

სიათებელი.

თეორემა 6 (რიმან-როხის თეორემა). g გვარის კომპაქტურ რიმანის ზედაპირზე S დივიზორისთვის $D \in \mathrm{Div}(S)$ წრფივი სივრცეები $H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$ და $H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$ სასრულგანზომილებიანებია და სამართლიანია შემდეგნი ტოლობა

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) = 1 - g + \deg D.$$

დამტკიცება. თეორემა დავამტკიცოთ ინდუქციით დივიზორში შემავალი წევრების რაოდენობის მიმართ. განვიხილოთ ნულოვანი დივიზორი $D = 0$. ამ შემთხვევაში ზედა ტოლობის მარცხენა მხარეს ექნება სახე: $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$; როგორც ცნობიალია, [9], ადგილი აქვს ტოლობას

$$\dim_{\mathbb{R}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{R}} H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(D)) = 2 - 2g,$$

ანუ,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(D)) = 1 - g;$$

დუალობის თეორემის შედეგად კი $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \Omega_S^{\alpha,0}(D)) = \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))$; ე.ი.,

$$\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) = 1 - g.$$

ვთქვათ, თეორემა სამართლიანია $D \in \mathrm{Div}(S)$ დივიზორისთვის. განვიხილოთ წერტილი $P \in S$ და დივიზორი $D - P$. ზემოთ ჩატარებული მსჯელობის ძალით გვექნება კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P) \to \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}_P \to 0,$$

რომლის შესაბამისი კოჰომოლოგიის ჯგუფთა ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C} \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to 0$$

შეიძლება გავყოთ ორ მოკლე ზუსტ მიმდევრობად:

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathrm{Im}(H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C}) \to 0$$

და

$$0 \to \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C})} \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to 0.$$

გვექნება,

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C}) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))} = 1 \\ &= \deg(D) - \deg(D-P). \end{aligned} \tag{$*$}$$

შედეგად, რადგანაც წრფივ სივრცეთა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა ყოველთვის იხლიჩება, გვექნება:

$$\begin{aligned} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) &\cong H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) \oplus \mathrm{Im}(H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C}), \\ H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) &\cong \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C})} \oplus H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)), \end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ:

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C}), \\ \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) &= \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) + \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

ამ ტოლობათა შეკრების შედეგად მივიღებთ:

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) + \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Im}(H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C}) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to \mathbb{C})}. \end{aligned}$$

$(*)$-ის ძალით, გვექნება:

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) \\ &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - 1. \end{aligned}$$

დაშვების თანახმად, თეორემა სამართლიანიუა D დივიზორისთვის, ე.ი., $\dim_{\mathbb{C}} H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) -$

$\dim_{\mathbb{C}}\, H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) = 1 - g + \deg\, D$; ანუ, გვექნება:

$$\dim_{\mathbb{C}}\, H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) - \dim_{\mathbb{C}}\, H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) = 1 - g + \deg\,(D) - 1$$

მაგრამ $\deg\,(D) - 1 = \deg\,(D-P)$. ამგვარად,

$$\dim_{\mathbb{C}}\, H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) - \dim_{\mathbb{C}}\, H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D-P)) = 1 - g + \deg\,(D-P).$$

მაშასადამე, თეორემის სამართლიანობიდან D დივიზორისათვის გამომდინარეობს მისი სამართლიანობა $D-P$ დივიზორისათვის.

ანალოგიურად, დავუშვათ თეორემის სამართლიანობა D დივიზორისთვის და განვიხილოთ $D+P$ დივიზორი;

$$0 \to \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D) \to \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}_P \to 0$$

მოკლე ზუსტ მიმდევრობასთან ასოცირებული კოჰომოლოგიის ჯგუფთა ზუსტი მიმდევრობის

$$0 \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D{+}P)) \to \mathbb{C} \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) \to H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D{+}P)) \to 0$$

მიმართებაში მსგავსი განხილვის შედეგად მივიღებთ ტოლობას

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{C}}\, H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) - \dim_{\mathbb{C}}\, H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) - \dim_{\mathbb{C}}\, \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) \to \mathbb{C})}\\ &= \dim_{\mathbb{C}}\, H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}}\, H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) + \dim_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Im}(H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) \to \mathbb{C}),\end{aligned}$$

ანუ

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{C}}\, H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) - \dim_{\mathbb{C}}\, H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) - \dim_{\mathbb{C}}\, \frac{\mathbb{C}}{\mathrm{Im}(H^0(\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) \to \mathbb{C})}\\ &= \dim_{\mathbb{C}}\, H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) - \dim_{\mathbb{C}}\, H^1(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D)) + \dim_{\mathbb{C}}\, \mathrm{Im}(H^0(S, \mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P)) \to \mathbb{C}),\end{aligned}$$

საიდანაც გვექნება

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbb{C}}\ H^0(S,\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P))-\dim_{\mathbb{C}}\ H^1(S,\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P))=\dim_{\mathbb{C}}\ H^0(S,\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))\\&-\dim_{\mathbb{C}}\ H^1(S,\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D))+1=1-g+\deg(D)+1,\end{aligned}$$

ამგვარად, ვინაიდან $\deg(D)+1=\deg(D+P)$,

$$\dim_{\mathbb{C}}\ H^0(S,\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P))-\dim_{\mathbb{C}}\ H^1(S,\mathcal{O}_S^{\alpha,0}(D+P))=1-g+\deg(D+P).$$

მაშასადამე, თეორემის სამართლიანობიდან D დივიზორისთვის გამომდინარეობს მისი სამართლიანობა $D+P$ დივიზორისთვის; ანუ, ვინაიდან თეორემა სამართლიანია $D=0$-ისთვის, ის სამართლიანია ყოველი ეფექტური დივიზორისათვის, $D\geq 0$. კომპაქტურ რიმანის ზედაპირზე ყოველ დივიზორს, $D\in \mathrm{Div}(S)$, კი აქვს სახე

$$D=\sum_{n=1}^{N}k_nP_N,\quad \forall n\in\{1,\dots,N\},\ k_n\in\mathbb{Z}.$$

მაშასადამე, თეორემა სამართლიანია ნებისმიერი დივიზორისთვის $D\in \mathrm{Div}(S)$. $\square$

7 ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა და დიფერენციალურ ფორმათა კონები კომპლექსურ მრავალსახეობაზე

გავნხილოთ n-განზომილებიანი კომპლექსური მრავალსახეობა M. მასზე განსაზღვრულ გლუვ ფუნქციას $f:M\to\mathbb{C}$ ვუწოდოთ *ფსევდოანალიზური* ან *განზოგადოებული ანალიზური* ან *ფსევდოჰოლომორფული ფუნქცია*, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას

$$\bar\partial f=f\alpha+\bar f\beta,$$

სადაც $\alpha,\beta\in\Gamma(M,\mathcal{A}_M^{0,1})$. ლოკალურ კოორდინატებში $\varphi=(z_1,\dots,z_n)$ მოცემული განტოლება მიიღებს სახეს

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \bar z_k}\mathrm{d}\bar z_k=\sum_{k=1}^{n}(a_kf+b_k\bar f)\mathrm{d}\bar z_k,$$

სადაც
$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathrm{d}\bar{z}_k, \quad \beta = \sum_{k=1}^{n} b_k \mathrm{d}\bar{z}_k.$$
მაშასადამე, ამ ფუნქციის კოორდინატული წარმდოგენა $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1}$ ფსევდოანალიზურია ყოველი ცვლადის მიმართ.

რიმანის ზედაპირის შემთხვევის ანალოგიურად, განვსაზღვროთ კონათა ჰომომორფიზმი
$$\bar{\partial}_{\alpha,\beta} : C_M^{\infty} \to \mathcal{A}_M^{0,1}$$
შემდეგნაირად: $U \subseteq M$ ღია სიმრავლისათვის და $f \in C_M^{\infty}(U)$
$$\bar{\partial}_{\alpha,\beta}(f) = \bar{\partial} f - f\alpha|_U - \bar{f}\beta|_U \in \mathcal{A}_M^{0,1}(U);$$
ანალოგიურად 1-განზომილებიანი შემთხვევისა, M მრავალსახეობაზე *ფსევდოანალიზურ ფუნქციათა კონა* განვსაზღვროთ, როგორც ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი $\mathcal{O}_M^{\alpha,\beta} := \mathrm{Ker}\bar{\partial}_{\alpha,\beta}$.

განვიხილოთ ასევე კონათა ჰომომორფიზმი
$$\bar{\partial}^{\star}_{\alpha,\beta} : \mathcal{A}_M^{1,0} \to \mathcal{A}_M^{1,1}$$
განსაზღვრული შემდეგნაირად: ღია $U \subseteq M$-ისათვის და $\omega \in \mathcal{A}_M^{1,0}(U)$-სათვის
$$\bar{\partial}^{\star}_{\alpha,\beta}\omega = -\bar{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega - \overline{\beta|_U \wedge \omega} \in \mathcal{A}_M^{1,1}(U).$$
და განვსაზღვროთ M-ზე *ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა*, როგორც ამ ჰომომორფიზმის ბირთვი $\Omega_M^{\alpha,\beta} = \mathrm{Ker}\,\bar{\partial}^{\star}_{\alpha,\beta}$.

დებულება 6. $\mathcal{O}_M^{\alpha,\beta}$ და $\Omega_M^{\alpha,\beta}$ კონები წარმოადგენენ $\mathbb{R}$-წრფივ სივრცეთა კონებს, ხოლო $\beta = 0$ შემთხვევაში კი $\mathcal{O}_M$-მოდულთა კონებს.

დამტკიცება. ეს ფაქტი მტკიცდება ანალოგიურად რიმანის ზედაპირების შემთხვევისა □

8 დასკვნა

ამგვარად, რიმანის ზედაპირზე ანტიჰოლომორფული კომხები ფიბრაციის გლუვი კვეთების მიმართ ფსევდოჰოლომორფულ, ან ფსევდოანალიზურ, ფუნქციათა და დიფერენციალურ 1-ფორმათა კონათა აგებისა და მათი ჩეხის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა დახასიათების შემდეგ, კონათა ჩეხის კოჰომოლოგიის მეშვეობით, ნაჩვენებ იქნა, რომ გარკვეული ტიპის ფსევდოჰოლომორფული ფუნქციებისა და დიფერენციალური 1-ფორმებისა და მათგან, დივიზორის მეშვეობით, ნაწარმოები კონები ხასიათდება რიმანის ზედაპირზე ჰოლომორფულ ფუნქციათა და დიფერენციალურ 1-ფორმათა კონათა მნიშვნელოვანი თვისებების ანალოგებით; კერძოდ, მათთვის სამართლიანია სერის ტიპის დუალობის თეორემა, რომლის დამტკიცების დროსაც გამოყენებულ იქნა ყურადსაღები ფაქტი, რომელიც მდგომარეობს იმაში, რომ მოცემული კონსტრუქციით ფსევდოჰოლომორფული ფუნქციისა და დიფერენციალური 1-ფორმის ნამრავლი წარმაოდგენს ჰოლომორფულ 1-ფორმას; ასევე, დამტკიცებულ იქნა რიმან-როხის თეორემის ანალოგი. ამასთანავე, ეს კონები აგებულ იქნა იმგვარად, რომ მოცემული კონსტრუქცია უშუალოდ განზოგადოებადია ნებისმიერი განზომილების კომპლექსური მრავალსახეობის შემთხვევაზე; ეს განზოგადოება მოკლედ მიმოხილულ იქნა მეშვიდე პარაგრაფში, მისი შემდგომი განხილვა და კვლევა შეიძლება საინტერესო აღმოჩნდეს თეორიული და პრაქტიკული თვალსაზრისით.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] G. Akhalaia, G. Giorgadze, V. Jikia, N. Kaldani, G. Makatsaria, N. Manjavidze: *Elliptic systems on Riemann Surefaces.* Lecture notes of TICMI, vol.13, pp. 1–147, Tbilisi University Press, Tbilisi, 2012.

[2] Lipman Bers: *An Outline of The Theory of Pseudoanalytic funcitions.* Bull. Amer. Math. Soc. 62, 1956.

[3] L. Bers: *Theory of pseudo-analytic functions*. New York University, 1950.

[4] O. Forster, B. Gilligan: *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH and Co. K, 1991.

[5] R. Gilbert and J. Buchanan: *First Order Elliptic Systems: A Function Theoretic Approach*. Academic Press, 1983.

[6] R.C. Gunning: *Lectures on Riemann Surfaces.* Princeton University Press, 1966.

[7] P. Griffiths, J. Harris: *Pirinciples of Algebraic Geometry.* A Wiley-Interscience Publication, 1978.

[8] D. Huybrechts: *Complex Geometry, An Introduction.* Springer-Verlag New York, 1991.

[9] Walter Koppelman: *Boundary Value Problems For Pseudoanalytic Functions.* Bull. Amer. Math. Soc. 1961.

[10] J. M. Lee: *Introduction to Smooth Manifolds* Springer-Verlag New York, 2012.

[11] Y. L. Rodin: *Generalized Analytic Functions on Riemann Surfaces.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1987.

[12] I. N. Vekua: *Generalized analytic functions*. Nauka, 1988.