ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის მიმართულება

ანა მელია

პოტენციალთა თეორიის აგების შესახებ ერთი სინგულარული კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის ბაკალავრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ნაშრომის ხელმძღვანელები: პროფესორი გიორგი ჯაიანი,
ასოცირებული პროფესორი
ნატალია ჩინჩალაძე

თბილისი,2021

შინაარსი

1 ანოტაცია

პოტენციალთა მეთოდი მძლავრი იარაღია ელიფსური განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების გამოსაკვლევად.
ლაპლასის განტოლებისათვის პოტენციალთა თეორია შეტანილია სასწავლო სახელმძღვანელოებში. პოტენციალთა მეთოდი გადაგვარების მქონე:

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

განტოლებისათვის აგებულია მ.მ. სმირნოვის მიერ.
ჩვენი მიზანია მახასიათებელი გადაგვარების მქონე

$$y\Delta u + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \;\; b = const$$

განტოლებისათვის პოტენციალთა თეორიის აგების მიზნით მოსამზადებელი სამუშაოების ჩატარება. აღსანიშნავია, რომ არაერთგვაროვანი ვაინშტაინის განტოლება გვხვდება წამახვილებული ფირფიტების ილია ვეკუას იერაქიული მოდელების N=0 მიახლოების ფარგლებში, როგორც განტოლება ჩაღუნვებისათვის. საბაკალავრო ნაშრომში პოტენციალთა თეორიის აგების მიზნით ჩატარებულია მოსამზადებელი, კერძოდ, გამოყვანილია გრინის ფორმულა მახასიათებელი გადაგვარების მქონე ვაინშტაინის განტოლებისათვის, შესწავლილია ვაინშტაინის ფუნდამენტური ამონახსნის თვისებები, მოყვანილია ვაინშტაინის განტოლების რეგულარული ამონახსნის წარმოდგენა მოცულობითი, მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების საშუალებით.

The potential method is a powerful tool for studying elliptic equations and systems for boundary value problems. The theory of potentials for the Laplace equation is included in textbooks. Method of potentials for the equation:

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

is built by M.M Smirnov. Our goal is to conduct preparatory work for the construction of potential theory for equations with characteristic degeneration:

$$y\Delta u + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \;\; b = const$$

It should be mentioned that for deflection investigation of of N=0 approximation of the hierarchical models of Ilia Vekua is reduced to the nonhomogeneous Weinstein equation. In order to build the theory of potentials the aim of bachelor’s thesis is to carry out preparatory works, in particular, to derive the Green’s formula for Weinstein’s equation with characteristic degeneration, properties of Weinstein’s fundamental solutions are studied, and the regular solution of Weinstein’s equation is given by volumetric, single layer and double layer potentials.

2 შესავალი

პოტენციალთა მეთოდი მძლავრი იარაღია ელიფსური განტოლებებისა და სისტემებისათვის სასაზღვრო ამოცანების გამოსაკვლევად (იხ. მაგ., [1]).
ლაპლასის განტოლებისათვის პოტენციალთა თეორია შეტანილია სასწავლო სახელმძღვანელოებში.
პოტენციალთა მეთოდი გადაგვარების მქონე ვაინშტაინის

$$y^m \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

განტოლებისათვის აგებულია [2]-ში.
ჩვენი მიზანია მახასიათებელი გადაგვარების მქონე

$$y\Delta u + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \;\; b = const$$

განტოლებისათვის პოტენციალთა თეორიის აგების მიზნით მოსამზადებელი სამუშაოების ჩატარება. აღსანიშნავია, რომ არაერთგვაროვანი ვაინშტაინის განტოლება გვხვდება წამახვილებული ფირფიტების ილია ვეკუას [3] იერაქიული მოდელების N=0 მიახლოების ფარგლებში, როგორც განტოლება ჩაღუნვებისათვის (იხ. [4]).

ნაშრომი შედგება შესავლის, ოთხი პარაგრაფის, დასკვნის და ციტირებული ლიტერატურისაგან. მესამე პარაგრაფში გამოყვანილია ვაინშტაინის განტოლება R^n-ში ღერძსიმეტრიული ჰარმონიული ფუნქციებისათვის. მეოთხე პარაგრაფში გამოყვანილია გრინის ფორმულა ვაინშტაინის განტოლებისათვის. მეხუთე პარაგრაფში შესწავლილია ვაინშტაინის ფუნქციონალური ამონახსნის თვისებები. მეექვსე პარაგრაფში მოყვანილია ვაინშტაინის განტოლების რეგულარული (C^2) ამონახსნის წარმოდგენა მოცულობითი, მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების საშუალებით. ციტირებულ ლიტერატურაში მითითებულია 5 წყარო, დასკვნაში შეჯამებულია ნაშრომში განხილული მასალა.

3 განტოლება ღერძსიმეტრიული ჰარმონიული ფუნქციისთვის

პრიზმული გარსების ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების ნულოვან მიახლოებაში $w \in C^2(D)$ ჩაღუნვისთვის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2h(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(2h(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}\right)=-\frac{F(x,y)}{\mu}, \tag{3.1}$$

სადაც D პრიზმული გარსის პროექციაა ზედა ნახევარსიბრტყეში, რომელიც შემოსაზღვრულია აბსცისათა ღერძის მონაკვეთითა და მისი ბოლოების შემცველი გლუვი წირით, $2h(x,y)=h^+(x,y)-h^-(x,y)$ პრიზმული გარსის სისქეა ($z=h^+(x,y)$, $z=h^-(x,y)$ ზედა და ქვედა ზედაპირების განტოლებებია)

$$F(x,y):=Q_z^+\sqrt{1+(h_x^+)^2+(h_y^+)^2}+Q_z^-\sqrt{1+(h_x^-)^2+(h_y^-)^2}+\overset{0}{Z},$$

Q_z^+ და Q_z^- გარსის ზედა და ქვედა ზედაპირზე მოქმედი ძალების გეგმილებია $0z$ ღერძზე.

$$\overset{0}{Z}=\rho\int_{h^-}^{h^+}Z(x,y,z)dz$$

Z სხეულზე მოქმედი მოცულობითი ძალის გეგმილია $0z$ ღერძზე , ρ სხეულის სიმკვრივეა, μ ლამეს მუდმივაა. თუ გარსის ნახევარსისქეს აქვს

$$h(x,y)=h_0y^b,\quad h_0,b=const>0,$$

სახე, მაშინ (3.1) განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს

$$Lw\equiv y\Delta w+bw_y=-\frac{F}{\mu h_0 y^{b-1}} \tag{3.2}$$

განვიხილოთ ლაპლასის განტოლება R^n-ში

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}+....+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}=0\quad ,n>2 \tag{3.3}$$

და ამ განტოლების ამონახსნი, რომელიც დამოკიდებულია შემდეგ ცვლადებზე

$$x=x_1\ \ y=\sqrt{x_2^2+....+x_n^2} \tag{3.4}$$

ანუ წარმოადგენს Ox ღერძის მიმართ სიმეტრიულ

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\varphi(x,y)$$

ამონახსნს. (3.4)-ის გათვალისწინებით (3.3) მიიღებს

$$y\Delta\varphi(x,y)+(n-2)\varphi_y=0 \tag{3.5}$$

სახეს. (3.5) განტოლება წარმოადგენს მეორე რიგის განტოლებას ღერძსიმეტრიული ჰარმონიული ფუნქციებისათვის.

განვიხილოთ (3.2) შესაბამისი ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნების შემდეგი თვისებები

თეორემა 3.1 *თუ* w (3.2) *განტოლების რეგულარული ამონახსნია* G *არეში, მაშინ* $r^{-b}w(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2})$ *სადაც* $r=\sqrt{x^2+y^2}$*, ასევე არის* (3.2) *განტოლების ამონახსნია იმ* G' *არეში, რომელიც* G *არის ასახვაა ერთეულრადიუსიანი წრეწირის მიმართ.*

თეორემა 3.1-ის სამართლიანობაში ადვილად დავრწმუნდებით $r^{-b}\varphi(\frac{x}{r^2},\frac{y}{r^2})$-ის (3.2) განტოლებაში ჩასმით.

უშუალო განტოლებაში ჩასმით მარტივი საჩვენებელია, რომ მთელ სიბრტყეზე, გარდა $(0,0)$ წერტილისა

$$L(r^{-b})=0$$

(3.2) განტოლების შეუღლებულ განტოლებას აქვს

$$Mv:=y\Delta v+(2-b)v_y=0$$

სახე. მართლაც,

$$Mv=\Delta(yv)-(bv)_y=y\Delta v+2vy-bv_y.$$

თეორემა 3.2 თუ

$$Lw=0 \ \text{ და } \ Mv=0,$$

მაშინ

$$w(x,y)=Cy^{1-b}v(x,y),\ \ C=const,\ \ (y>0).$$

დამტკიცება: ცხადია, რომ

$$y\Delta f+bf_y=y^{1-b}[y\Delta g+(2-b)g_y],$$

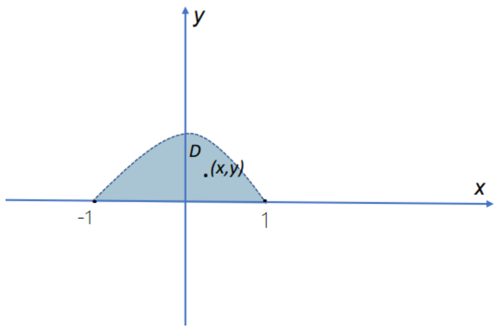
სადაც

$$f(x,y)=y^{1-b}g(x,y)$$

თეორემა 3.1-დან გამომდინარეობს, რომ $b<0$ შემთხვევა დაიყვანება $b>0$ შემთხვევაზე. რადგან ცხადია, რომ $2-b>0$, თუ $b<0$.

განვიხილოთ განტოლება:

$$E(u)\equiv u_{xx}+u_{yy}+\frac{b}{y}\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{3.6}$$



(3.6) განტოლება სინგულარული დიფერენციალური განტოლებაა, რადგან მისი $\frac{b}{y}$ კოეფიციენტი შემოუსაზღვრავია. განტოლებას ვიხილავთ D არეში. განტოლება ამ არეში და საზოგადოდ ზედა და ქვედა ნახევარსიბრტყეში არის ელიფსური, ხოლო საზღვრის მონაკვეთზე, რომელიც აბსცისათა ღერძზეა და საერთოდ აბსცისთა ღერძზე ხდება განტოლების რიგის გადაგვარება.

4 გრინის ფორმულა

ვთქვათ $\nu, u \in C^2(D) \bigcap C^1(\bar{D})$. სამართლიანია შემდეგი იგივეობა

$$\upsilon Lu - uM\upsilon = (\eta\upsilon u_\xi - \eta\upsilon_\xi u)_\xi + (\eta\upsilon u_\eta - \eta\upsilon_\eta u + (b-1)\upsilon u)_\eta \tag{4.1}$$

გაუს-ოსტროგრადსტკის ფორმულის გამოყენებით მივიღებთ, რომ:

$$\iint\limits_D (\upsilon Lu - uM\upsilon) d\xi d\eta = \int\limits_\Gamma \eta(\upsilon \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial n})ds + (b-1)\int\limits_\Gamma \upsilon u \cos\hat{\eta n}\, ds, \tag{4.2}$$

სადაც n არის D არის Γ საზღვრის გარე ნორმალი.
განვიხილოთ

$$L'w \equiv y^b \Delta w + b y^{b-1} w_y = 0$$

განტოლება, რომელიც მიიღება (3.6)-დან მისი y^b-ზე გამრავლებით L' არის თვით-შეუღლებული ოპერატორი.
შემდეგი ტოლობის

$$\upsilon L'u - uL'\upsilon = (\eta^b \upsilon u_\xi - \eta^b u\upsilon_\xi)_\xi + (\eta^b \upsilon u_\eta - \eta^b u\upsilon_\eta)_\eta,$$

ძალით ცხადია, რომ Oxy სიბტყის ნებიმისერ ზედა ნახევარსიბრტყეში მდებარე D არისთვის:

$$\iint\limits_D (\upsilon L'u - uL'\upsilon) d\eta d\xi = \int\limits_\Gamma \eta^b(\upsilon\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial \upsilon}{\partial n})ds \tag{4.3}$$

ცხადია (4.1) და (4.3) გრინის ფორმულების კერძო შემთხვევებია. ზოგად შემთხვევაში გრინის ფორმულები იხ., მაგალითად, [5]-ში.

5 ვაინშტაინის ფუნდამენტური ამონახსნი, მისი თვისებები

შემდეგი გამოსახულება არის (3.6) განტოლების ფუნდამენტური ამონახსნი:

$$Z(x,y,\eta,\xi,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + 4y\eta\sin^2(\theta/2)]^{-\frac{b}{2}} \sin^{b-1}\theta \, d\theta$$

$$Z(x,y,\eta,\xi,b) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [(x-\xi)^2 + \eta^2 + y^2 - 2y\eta\cos(\theta)]^{-\frac{b}{2}} \sin^{b-1}\theta \, d\theta \tag{5.1}$$

რადგან

$$(y-\eta)^2 + 4y\eta\sin^2\frac{\theta}{2} = y^2 - 2y\eta + \eta^2 + 4y\eta\sin^2\frac{\theta}{2} = y^2 + \eta^2 - 2y\eta(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}) =$$

$$= y^2 + \eta^2 - 2y\eta(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - 2\sin^2\frac{\theta}{2}) = y^2 + \eta^2 - 2y\eta\cos\theta$$

სადაც, $-1 < x, \xi < 1; \quad y \geq 0, \quad \eta \geq 0, \quad b > 0.$
ვაჩვენოთ, რომ $Z(x,y,\eta,\xi,b)$ აკმაყოფილებს ვაინშტაინის

$$y\Delta w + bw_y = 0$$

განტოლებას, (x,y)-ის და (ξ,η)-ს მიმართ, როცა $(x,y) \neq (\xi,\eta)$ მართლაც,

$$y\Delta Z + bZ_y = \frac{b}{2\pi}\int_0^\pi \Big[b\eta\cos\theta[(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2 - 2y\eta\cos\theta]^{-\frac{b}{2}-1}\sin^{b-1}\theta -$$

$$-(b+2)y\eta^2 sin^{b+1}\theta[(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2 - 2y\eta\cos\theta]^{-\frac{b}{2}-2}\Big]d\theta =$$

$$= \frac{b\eta}{2\pi}\int_0^\pi d_\theta[sin^b\theta[(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2 - 2y\eta\cos\theta]^{-\frac{b}{2}-1}]d\theta =$$

$$= \frac{b\eta}{2\pi}|sin^b\theta[(x-\xi)^2 + y^2 + \eta^2 - 2y\eta\cos\theta]^{-\frac{b}{2}-1}|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0$$

რადგან $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + 4y\eta\sin^2\frac{\theta}{2} \geq (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, (5.1) -ში მიღებული გამოსახულე-ბის კვადრატულ ფრჩხილებში მოყვანილი ნაწილი ნულის ტოლი ხდება მხოლოდ მაშინ, როდესაც $(x,y) = (\xi,\eta)$ და Z-ს აქვს სინგულარობა Oy ღერძზე ამ წერტილში.

მოვიყვანოთ Z-ის რამდენიმე თვისება:

1. სიმეტრიულია (x,y) და (ξ,η) მიმართ;

2. დადებითია ზედა ნახევარსიბრტყის ყველა წერტილში (როდესაც $(x,y) = (\xi,\eta)$, $Z = +\infty$);

3. თუ ერთ-ერთი წყვილი (x,y) ან (ξ,η) არის ფიქსირებული წერილი მაშინ უსასრულო-ბაში ხდება 0-ის ტოლი. ეს მარტივად ჩანს შემდეგი ტოლობებიდან:

$$Z(x,y,\eta,\xi,b) \leq \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \sin^{b-1}\theta d\theta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{b/2}} = \frac{\Gamma(\frac{b}{2})\Gamma^{-1}(\frac{b+1}{2})}{2\pi^{\frac{1}{2}}[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{b/2}}; \tag{5.2}$$

4. ანალიზური ფუნქციაა როდესაც $(x,y) \neq (\xi,\eta)$.

5.
$$Z(x,y,\xi,0,b) = \frac{\Gamma(\frac{b}{2})\Gamma^{-1}(\frac{b+1}{2})}{2\pi^{\frac{1}{2}}}[(x-\xi)^2+y^2]^{-\frac{b}{2}}$$
$$Z(x,0,\xi,\eta,b) = \frac{\Gamma(\frac{b}{2})\Gamma^{-1}(\frac{b+1}{2})}{2\pi^{\frac{1}{2}}}[(x-\xi)^2+\eta^2]^{-\frac{b}{2}} \tag{5.3}$$

აქ
$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \quad Rez > 0,$$

ეილერის გამა ფუნქციაა.

ასევე შევნიშნოთ, რომ თუ $(x,y) \neq (\xi,\eta)$, მაშინ:

$$\frac{\partial Z}{\partial y}\Big|_{y=0} = \frac{b\eta}{2\pi}\int_0^\pi \cos\theta[(x-\xi)^2+\eta^2]^{-\frac{b}{2}-1}\sin^{b-1}\theta d\theta \tag{5.4}$$
$$= \frac{b\eta}{2\pi}[(x-\xi)^2+\eta^2]^{-\frac{b}{2}-1}\frac{1}{b}\int_0^\pi d\sin^b\theta = 0$$

(5.1)-დან $(y,\eta > 0, (x,y) \neq (\xi,\eta))$

$$Z(x,y,\eta,\xi,b) = \frac{(4y\eta)^{-\frac{b}{2}}}{2\pi}\int_0^\pi (\varepsilon^2 + \sin^2\frac{\theta}{2})^{-\frac{b}{2}}\sin^{b-1}\theta d\theta, \tag{5.5}$$

სადაც
$$\varepsilon^2 = \frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4y\eta} \neq 0 \tag{5.6}$$

$u = \sin\frac{\theta}{2}$ ჩასმის შემდეგ, (5.5)-ის ინტეგრალური $I(\varepsilon)$ ნაწილი იღებს ფორმას:

$$2^{-b}I(\varepsilon) = \int_0^1 \frac{u^{b-1}\,du}{(\varepsilon^2+u^2)^{\frac{b}{2}}} + \int_0^1 \frac{[(1-u^2)^{\frac{b}{2}-1}-1]u^{b-1}\,du}{(\varepsilon^2+u^2)^{\frac{b}{2}}} = L(\varepsilon) + R_1(\varepsilon). \tag{5.7}$$

შემდეგი გარდაქმნის $u = \varepsilon\xi$ გათვალისწინებით, მივიღებთ:

$$L(\varepsilon) = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{\xi^{b-1}d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{b}{2}}}$$

და კალკულუსის ფუნდამენტური თეორემიდან გამომდინარე გვაქვს

$$L'(\varepsilon) = -\varepsilon^{-1}(1+\varepsilon^2)^{-\frac{b}{2}}.$$

ცხადია, თუ $\varepsilon \to 0$ მივიღებთ:

$$L'(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon)\ , \quad L(\varepsilon) = -\log\varepsilon + O(1). \tag{5.8}$$

ახლა განვიხილოთ $R_1(\varepsilon)$, თუ $b = 2$, $\frac{\partial^k R_1}{\partial \varepsilon^k} = 0$ (k=0,1,2,...), სხვა შემთხვევებში ($b \neq 2$), როცა $\varepsilon \to 0$

$$R_1(\varepsilon) = O(1). \tag{5.9}$$

ადვილი დასანახია, რომ $R_1(\varepsilon)$ როდესაც $\varepsilon \neq 0$ ინტეგრალი შეგვიძლია გავაწარმოვოთ რამდენჯერაც გვინდა. ცხადია როდესაც $b \neq 2$,

$$\frac{dR_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} = -b\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{[(1-u^2)^{\frac{b}{2}-1} - 1]u^{b-1}}{(\varepsilon^2 + u^2)^{\frac{b}{2}+1}} du - b\varepsilon \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{[(1-u^2)^{\frac{b}{2}-1} - 1]u^{b-1}}{(\varepsilon^2 + u^2)^{\frac{b+2}{2}}} du \tag{5.10}$$

მეორე ინტეგრალი, როცა $\varepsilon \to 0$ მიისწრაფის ნულისკენ. მოვახდინოთ ჩასმა

$$(1-u^2)^{\frac{b}{2}-1} - 1 = u^2 f(u),$$

სადაც

$$f(u) = -\frac{b-2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{b-2}{2} \cdot \frac{b-4}{2} u^2 - ...$$

მარტივი დასანახია, რომ

$$|f(u)| \neq 0, \qquad 0 \leq u \leq \frac{1}{2}.$$

ამის გათვალისწინებით (5.10)-ის პირველი შესაკრები ინტეგრალი მიიღებს

$$I_1(\varepsilon) = -b\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{f(u)u^{b+1}}{(\varepsilon^2 + u^2)^{\frac{b+2}{2}}} du.$$

სახეს.

საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით:

$$I_1(\varepsilon) = -f(u)b\varepsilon \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^{b+1}}{(\varepsilon^2 + u^2)^{\frac{b+2}{2}}} du, \qquad 0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}.$$

$u = \varepsilon\xi$ ჩასმა გვაძლევს:

$$I_1(\varepsilon) = -b\varepsilon f(u_1) \int_0^{\frac{1}{2\varepsilon}} \frac{\xi^{b+1}}{(1 + \xi^2)^{\frac{b+2}{2}}} d\xi = -b\varepsilon f(u_1) T(\varepsilon) \tag{5.11}$$

ცხადია,

$$T'(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad \text{და} \quad T(\varepsilon) = -\log\varepsilon + O(1).$$

(5.10) და (5.11)-დან გამომდინარეობს, რომ:

$$\frac{dR_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} = O(\varepsilon \log \frac{1}{\varepsilon}). \tag{5.12}$$

ანალოგიურად მივიღებთ:

$$\frac{d^2 R_1(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = O(\log \frac{1}{\varepsilon}).$$

(5.5), (5.7) და (5.8)-დან, როდესაც $\varepsilon \to 0$ მივიღებთ:

$$Z(x,y,\xi,\eta,b) = -\frac{(y\eta)^{-\frac{b}{2}}}{2\pi}\log[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^{\frac{1}{2}} + R(x,y,\xi,\eta,b), \tag{5.13}$$

სადაც

$$R(x,y,\xi,\eta,b) = \frac{(y\eta)^{-\frac{b}{2}}}{2\pi}\left[R_1(\varepsilon) + \frac{1}{2}\log(4y\eta) + C + \frac{b}{2}\cdot\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\frac{b}{2}(\frac{b}{2}+1)}{2!}\cdot\frac{\varepsilon^4}{4}\right] \tag{5.14}$$

აქ C არის სავსებით განსაზღვრული მუდმივი. ε-ის კონკრეტული მნიშვნელობის ჩასმის შემდეგ ვიღებთ განტოლებას C-ს მიმართ.
რადგან, როცა $r \to 0$, გვაქვს

$$\left|\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}\right| < c \ , \left|\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}\right| < c^*,$$

$$\left|\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x^2}\right| < c \ , \left|\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial y^2}\right| < \frac{c^*}{r}, \qquad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \tag{5.15}$$

ამიტომ გვექნება

$$R = O(1),\ \frac{\partial R}{\partial x} = O\left(r\log\frac{1}{r}\right),\ \frac{\partial R}{\partial y} = O(1),\ \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = O\left(r\log\frac{1}{r}\right),\ \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} = O\left(r\log\frac{1}{r}\right) \tag{5.16}$$

(3.6) განტოლების (5.1) ფუნდამენტური ამონახსნი შეიძლება გამოვსახოთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების საშუალებით.
როცა $b < 2$, თეორემა (3.2)-ის ძალით, არსებობს კიდევ ერთი ფუნდამენტური ამონახსნი:

$$Z^*(x,y,\xi,\eta,b) = y^{1-b}Z(x,y,\xi,\eta,2-b) \quad \eta, y > 0 \tag{5.17}$$

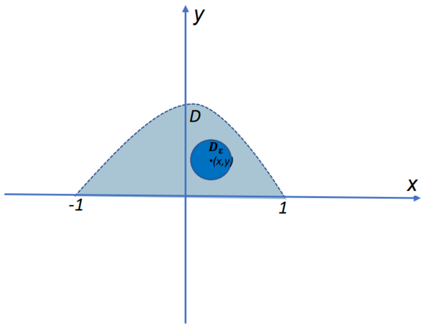
6 გრინის ფორმულა რეგულარული ამონახსნის წარმოდგენისთვის

შევხედოთ (3.6) განტოლებას D არეში, Γ საზღვრით, რომელიც შედგება ზედა ნახევარსიბრტყეში მყოფი გლუვი σ რკალისგან, $y > 0$ და Ox ღერძის $[-1,+1]$ სეგმენტზე.
ვთქვათ

$$Lu = f_1(x,y), \quad \left(\iint\limits_D |f_1(\xi,\eta)| d\xi d\eta < \infty\right) \tag{6.1}$$

და

$$v(x,y) = Z(x;y;\xi;\eta;2-b). \quad (2-b>0). \tag{6.2}$$



(4.2) ფორმულა შეგვიძლია გამოვიყენოთ u და v ფუნქციების მიმართ $D - D_\varepsilon$ არეზე, როდესაც D_ε არის წრეწირი ცენტრით წერტილში $(x,y) \in D$ და რადიუსით $\varepsilon(D\varepsilon \subset D)$. აღვნიშნოთ D_ε საზღვარი σ_ε-ით, გვექნება

$$\iint\limits_{D-D_\varepsilon} Z(x;y;\xi;\eta;2-b)f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta = \int\limits_{\sigma} \eta\left[Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n} - u(\xi,\eta)\frac{\partial Z}{\partial n}\right]ds+$$

$$+(b-1)\int\limits_{\Gamma} u(\xi,\eta)Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\cos(\eta,n)ds+$$

$$+\int\limits_{\sigma_2} \eta\left[Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n} - u(\xi,\eta)\frac{\partial Z(x;y;\xi;\eta;2-b)}{\partial n}\right]ds+$$

$$+(b-1)\int\limits_{\sigma_2} u(\xi,\eta)Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\cos(\eta,n)ds.$$

(5.13) და (5.16)-ის ძალით, გვექნება

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\sigma_2} \eta\left[Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n} - u(\xi,\eta)\frac{\partial Z(x;y;\xi;\eta;2-b)}{\partial n}\right]ds+$$

$$+(b-1)\int\limits_{\sigma_2} u(\xi,\eta)Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\cos(\eta,n)ds =$$

$$= -u(x,y)\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\sigma_2}\eta\frac{1}{2\pi}(y\eta)^{\frac{b}{2}-1}\frac{ds}{\varepsilon} = -\frac{u(x,y)}{2\pi}y^{\frac{b}{2}-1}\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0}^{2\pi}(y+\varepsilon\sin\theta)^{\frac{b}{2}}\frac{\varepsilon d\theta}{\varepsilon} =$$

$$= -y^{b-1}u(x,y).$$

ანუ

$$\begin{aligned} u(x,y) = -y^{1-b}\iint\limits_{D} Z(x;y;\xi;\eta;2-b)f_1(\xi,\eta)d\xi d\eta + y^{1-b}\int\limits_{\sigma}\eta\Big[Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial n} - \\ - u(\xi,\eta)\frac{\partial Z(x;y;\xi;\eta;2-b)}{\partial n}\Big]ds + (b-1)y^{1-b}\int\limits_{\Gamma} u(\xi,\eta)Z(x;y;\xi;\eta;2-b)\cos(\eta,n) \end{aligned} \tag{6.3}$$

(6.1) განტოლების რეგულარული (6.3) ამონახსნის სამი წევრი წარმოადგენს, შესაბამისად, მოცულობითი, მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების ჯამს, ბოლო ინტეგრალი გაჩნდა განტოლების გადაგვარებიდან გამომდინარე.

7 დასკვნა

საბაკალავრო ნაშრომში პოტენციალთა თეორიის აგების მიზნით ჩატარებულია მოსამზადებელი, კერძოდ, გამოყვანილია გრინის ფორმულა მახასიათებელი გადაგვარების მქონე ვაინშტაინის განტოლებისათვის, შესწავლილია ვაინშტაინის ფუნდამენტური ამონახსნის თვისებები, მოყვანილია ვაინშტაინის განტოლების რეგულარული ამონახსნის წარმოდგენა მოცულობითი, მარტივი და ორმაგი ფენის პოტენციალების საშუალებით.

8 ლიტერატურა

[1] Miranda, K. *Elliptic partial differential equations, IL.* Moscow, 1957, 256 p.

[2] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа, учебное пособие для вуза,* . Москва 1985

[3] Vekua, I.N. *On a way of calculating of prismatic shells* Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences, 1955, 21, 191-259. (Russian)

[4] Jaiani, G.V. *On the deflections of thin wedge-shaped shells,* Bulletin of the Academy of Science of the Georgian Republic, 1972,65 (3), 543-546. (Russian)

[5] Weinstein, A. *Discontinuous integrals and generalized potential theory,* Trans., Amer. Math. Soc., 1948, 63 (2), 342-354