ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თინათინ ინაშვილი

ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა შეშფოთებული სამართი დიფერენციალური განტოლებისათვის მართვებში დისკრეტული და განაწილებული დაგვიანებით

სამაგისტრო პროგრამის სახელწოდება: გამოყენებითი მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: თამაზ თადუმაძე , ფიზიკა–მათემატიკურ
მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი

თბილისი 2021

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ანოტაცია

ნაშრომში, განხილულია კოშის ამოცანა მართვებში დისკრეტული $u(t-\theta)$ და განაწილებული $\int_{-\sigma}^{-\tau} v(t+s)ds$ დაგვიანებების შემცველი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u(t-\theta), v(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v(t+s)ds),\ t \in [t_0, t_1],\ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

რომელიც მიღებულია

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_0(t), u_0(t-\theta), v_0(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v_0(t+s)ds),\ x(t_0) = x_{00} \tag{2}$$

ამოცანისგან $u_0(t), v_0(t)$ მართვებისა და x_{00} საწყისი ვექტორის შეშფოთებით.

დამტკიცებულია შეშფოთებული (1) ამოცანის $x(t)$ ამონახსნის ანალიზური წარმოდგენის ფორმულა

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t; \delta w) + o(t; \delta w), \tag{3}$$

სადაც $x_0(t)$ არის (2) ამოცანის ამონახსნი, $\delta x(t;\delta w)$ არის წრფივი ოპერატორი

$$\delta w = (x_0 - x_{00},\ u(\cdot) - u_0(\cdot),\ v(\cdot) - v_0(\cdot))$$

შეშფოთების მიმართ, ხოლო $o(t;\delta w)$ არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე δw შეშფოთე-ბასთან შედარებით. ცხადი სახით არის აგებული წრფივი ოპერატორი $\delta x(t;\delta w)$.

გარდა ამისა, $\delta x(t;\delta w)$ ოპერატორის სახე დაკონკრეტებულია წრფივი დიფერენციალური განტოლებისათვის და მოთხოვნა-მიწოდების საბაზრო ურთიერთობის დიფერენციალური მოდელისთვის.

არსებით სიახლეს ნაშრომში წარმოადგენს, ფორმულა (3) და $\delta x(t;\delta w)$ ოპერატორის სახე დიფერენციალური განტოლებისათვის, სადაც მართვებში გათვალისწინებულია განაწილებული დაგვიანება. (3) ფორმულა გამოიყენება მათემატიკური მოდელების სენსიტიურ ანალიზში, შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნაში, ოპტიმალური მართვის თეორიაში.

ნაშრომში მიღებული შედეგების შესახებ გაკეთებული იყო მოხსენება კონფერენციაზე " თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXV საერთა-შორისო გაფართოებული სხდომები", 21-23 აპრილი, 2021 წელი, http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2021/programa_geo.pdf.

Summary

In the work, Cauchy's problem is considered for the ordinary differential equation

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u(t-\theta), v(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v(t+s)ds),\ t \in [t_0, t_1],\ \ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

containing discrete $u(t-\theta)$ and distribute $\int_{-\sigma}^{-\tau} v(t+s)ds$ delays in controls, which is obtained from the problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_0(t), u_0(t-\theta), v_0(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v_0(t+s)ds),\ x(t_0) = x_{00} \tag{2}$$

by perturbations of the control $u_0(t)$, $v_0(t)$ functions and the initial vector x_{00}.

The analytic representation formula is proved

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t;\delta w) + o(t;\delta w) \tag{3}$$

for solution $x(t)$ of the problem (1), where $x_0(t)$ is solution of the problem (2), $\delta x(t;\delta w)$ is the linear operator with respect to perturbation

$$\delta w = (x_0 - x_{00}, u(\cdot) - u_0(\cdot),\ v(\cdot) - v_0(\cdot))$$

and $o(t;\delta w)$ is infinitely small of the high order comparatively with perturbation δw. The linear operator $\delta x(t;\delta w)$ is constructed in the explicit form.

The essential novelty in the work is the formula (3) and a form of operator $\delta x(t;\delta w)$ for the equation, where taken into account distribute delay in controls. Moreover, the form of operator $\delta x(t;\delta w)$ is concretized for the linear differential equation and the demand-supply marketing differential model.

On the results obtained in the work a report was made on the conference "XXXV International Enlarged Sessions of the Seminar of I. Vekua Institute of Applied Mathematics of TSU", April 21-23, 2021, http://www.viam.science.tsu.ge/enlarged/2021/programa_geo.pdf.

მოტივაცია და შესავალი

რეალური სამართი სისტემები, როგორც წესი, შეიცავენ დაგვიანების ფაქტორს და აღიწერებაიან დიფერენციალური განტოლებებით, რომლებშიც გათვალისწინებულია დისკრეტული და განაწილებული დაგვიანებები [1-3]. მართვებში დისკრეტული და განაწილებული დაგვიანებების შემცველი განტოლების გამოკვლევის მოტივაციის მიზნით, ქვემოთ ჩვენ განვიხილავთ საბაზრო ურთიერთობის ერთ-ერთ უმარტივეს მოდელს.

ვთქვათ

$$\theta > 0,\ \sigma > \tau > 0,\ b > a > 0 \quad \text{და} \quad d > c > 0$$

მოცემული რიცხვებია, ხოლო $I = [t_0, t_1]$ ფიქსირებლი ინტერვალია, გარდა ამისა ვიგულისხმოთ, რომ $t_0 > \max\{\theta, \sigma\}$.

ვთქვათ, მოთხოვნა-მიწოდების საბაზრო ურთიერთობა აღიწერება სკალარული $D(t, p, q)$ და $S(t, p_1, q_1)$ ფუნქციებით, რომლებიც უწყვეტია $I \times [a,b] \times [c,d]$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადია (p,q) და (p_1,q_1) ცვლადების მიმართ.

ვთქვათ

$$p(t) \in [a,b], t \in I_1 = [t_0 - \theta, t_1]$$

არის g_1 საქონლის ფასი დროის t მომენტში, ხოლო

$$q(t) \in [c,d], t \in I_2 = [t_0 - \sigma, t_1]$$

არის g_2 საქონლის ფასი დროის t მომენტში.

ვიგულისხმოთ, რომ დროის $t \in I$ მომენტში უნდა დაკმაყოფილდეს მომხმარებლის მოთხოვნა g_1 და g_2 საქონელზე, რომელიც მან შეუკვეთა $t-\theta$ მომენტში და დროის $[t-\sigma,\ t-\tau]$ ინტერვალის განმავლობაში (ჯამურად ამ ინტერვალის ყოველ მომენტში).

ფუნქციას

$$\Theta(t) = D(t, p(t), q(t)) - S(t, p(t-\theta), \int_{-\sigma}^{-\tau} q(t+s)ds), \ t \in I$$

ეწოდება დისბალანსის ინდექსი.

თუ $\Theta(t) = 0$, მაშინ არ გვაქვს დისბალანსი ე. ი. მოთხოვნა დაკმაყოფილებულია. თუ $\Theta(t) > 0$, მაშინ მოთხოვნა აჭარბებს მიწოდებას. თუ $\Theta(t) < 0$, მაშინ მიწოდება აჭარბებს მოთხოვნას.

ნაშრომში, განხილულია დისბალანსის ინტეგრალური ინდექსი

$$y(t) = \Theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Theta(\xi) d\xi.$$

აქედან მიიღება დიფერენციალური განტოლება მართვებში დისკრეტული და განაწილებული დაგვიანებით

$$\dot{y}(t) = D(t, p(t), q(t)) - S(t, p(t-\theta), \int_{-\sigma}^{-\tau} q(t+s)ds), \ t \in I \qquad (4)$$

და საწყისი პირობით

$$y(t_0) = y_0 := \Theta(t_0).$$

$p(t-\theta)$ ეწოდება დისკრეტული დაგვიანების ეფექტი, ხოლო $\int_{-\sigma}^{-\tau} q(t+s)ds$ ეწოდება განაწილებული დაგვიანების ეფექტი.

ნაშრომში, შეშფოთებული სამართი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის მართვებში დისკრეტული და განაწილებულ დაგვიანებებით

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u(t-\theta), v(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v(t+s)ds), \ x(t_0) = x_0$$

გამოკვლეულია საკითხი განტოლების $x(t)$ ამონახსნის ანალიზური სახით წარმოდგენის შესახებ იმ შემთხვევაში, როცა ცნობილია თავდაპირველი ანუ საწყისი განტოლების

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_0(t), u_0(t-\theta), v_0(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v_0(t+s)ds), \ \ x(t_0) = x_{00}$$

ამონახსნი $x_0(t)$. სახელდობრ, ერთის მხრივ- დამტკიცებულია შემდეგი ფორმულა

$$x(t) = x_0(t) + \delta x(t;\delta w) + o(t;\delta w), \tag{5}$$

სადაც $\delta w = (\delta x_0, \delta u(\cdot), \delta v(\cdot)) = (x_0 - x_{00}, u(\cdot) - u_0(\cdot), v(\cdot) - v_0(\cdot))$ აღნიშნავს საწყისი x_{00} ვექტორის, $u_0(t)$ და $v_0(t)$ მართვების ვარიაციას; $\delta x(t;\delta w)$ არის წრფივი ოპერატორი δw ვარიაციის მიმართ, ხოლო $o(t;\delta w)$ შესაკრები არის მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე δw ვარიაციასთან შედარებით, თანაბრად $t \in I$ მიმართ. მეორეს მხრივ- დადგენილია $\delta x(t;\delta w)$ ოპერატორის სახე. (5) სახის ფორმულა გამოიყენება მათემატიკური მოდელების სენსიტიურ ანალიზში, შეშფოთებული განტოლების მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნაში, ოპტიმალური მართვის თეორიაში.

ნაშრომში, **სიახლეს წარმოადგენს** ის გარემოება, რომ აქ ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა (5) დამტკიცებულია მართვებში განაწილებული დაგვიანების გათვალისწინებით. (5) ტიპის ფორმულა სხვადასხვა კლასის სამართი დიფერენციალური განტოლებებისათვის მართვებში დაგვიანების გარეშე ან დისკრეტული დაგვიანებით, მიღებულია ნაშრომებში [3, 4, 5]. ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, მართვების გარეშე, ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა დამტკიცებულია რევაზ გამყრელიძის მონოგრაფიაში[6].

სამაგისტრო ნაშრომი შედგება ოთხი პარაგრაფისაგან. პირველ პარაგრაფში მოყვანილია ძირითადი შედეგი თეორემა 1.1-ის სახით, აქვე მოცემულია ამ შედეგის ანალიზი. შემდეგ, ძირითადი შედეგი დაკონკრეტებულია წრფივი განტოლებისათვის და ბოლოს, ამონახსნის წარმოდგენის ფორმულა ამოწერილია მოთხოვნა-მიწოდების (4) დიფერენციალური მოდელისათვის. მეორე პარაგრაფში გადმოცემულია დამხმარე დებულებები, რომლებიც არსებითად გამოიყენება მომდევნო პარაგრაფებში. მესამე პარაგრაფში დადგენილია ამონახსნის ნაზრდის რიგი, რომლის საფუძველზე, [3]-ში გადმოცემული მეთოდით, მე-4 პარაგრაფში დამტკიცებულია ძირითადი თეორემა. ნაშრომის ბოლოს მოყვანილია დასკვნა და ლიტერატურის ნუსხა.

ნაშრომში მიღებული შედეგების შესახებ გაკეთებული იყო მოხსენება კონფერენციაზე " თსუ ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXV საერთაშორისო გაფართოებული სხდომები", 21-23 აპრილი, 2021 წელი.

§ 1. ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ვთქვათ $I=[t_0,t_1]$ სასრული ინტერვალია, ხოლო $\theta>0$ და $\sigma>\tau>0$ მოცემული რიცხვებია. R_x^n-ით აღვნიშნოთ $x=(x^1,...,x^n)^T$ ვექტორთა (წერტილთა) n-განზომილებიანი სივრცე ნორმით

$$|x|^2=\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\ ,$$

სადაც T აღნიშნავს ტრანსპონირების ოპერაციას. ვიგულისხმოთ, რომ $O\subset R_x^n$, $U\subset R_u^r$ და $V\subset R_v^m$ ამოზნექილი ღია სიმრავლეებია. განვიხილოთ ფუნქცია

$$f(t,x,u,u_1,v,v_1)=(f^1(t,x,u,u_1,v,v_1),...,f^n(t,x,u,u_1,v,v_1))^T\ ,$$

რომელიც უწყვეტია $I\times O\times U^2\times V^2$ სიმრავლეზე და უწყვეტად წარმოებადი $x\in O$, $(u,u_1)\in U^2$ და $(v,v_1)\in V^2$ ცვლადების მიმართ.

Ω-თი აღვნიშნოთ სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტის წერტილების მქონე უბან-უბან უწყვეტი $u(t)\in U, t\in I_1=[t_0-\theta,t_1]$ ფუნქციების (მართვების) სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $clu(I)$ კომპაქტია და შედის U-ში, აქ $u(I)=\{u(t):t\in I_1\}$.

Δ-თი აღვნიშნოთ სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტის წერტილების მქონე უბან-უბან უწყვეტი $v(t)\in V, t\in I_2=[t_0-\sigma,t_1]$ ფუნქციების (მართვების) სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას: $clv(I)$ კომპაქტია და შედის V-ში.

ყოველ $w=(x_0,u(\cdot),v(\cdot))\in W=O\times\Omega\times\Delta$ ელემენტს შევუსაბამოთ სამართი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მართვებში დისკრეტული და განაწილებული დაგვიანებებით

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t),u(t-\theta),v(t),\int_{-\sigma}^{-\tau}v(t+s)ds) \qquad (1.1)$$

საწყისი პირობით

$$x(t_0) = x_0 \,. \qquad (1.2)$$

$u(t-\theta)$ ეწოდება დისკრეტული დაგვიანების ფაქტორი, იგი მიუთითებს რომ მოცემულ t მომენტში განტოლების მარჯვენა მხარე დამოკიდებულია $u(t)$ მართვის ფუნქციის მნიშვნელობაზე წინა $t-\theta$ მომენტში. $\int_{-\sigma}^{-\tau} v(t+s)ds$ ეწოდება განაწლებული დაგვიანების ფაქტორი, იგი მიუთითებს რომ მოცემულ t მომენტში განტოლების მარჯვენა მხარე დამოკიდებულია $v(t)$ მართვის ფუნქციის ნაჭერზე

$$\{v(t+s) : s \in [-\sigma, -\tau]\}.$$

განსაზღვრება 1.1. ვთქვათ, $w = (x_0, u(\cdot), v(\cdot)) \in W$ ფიქსირებული ელემენტია. უწყვეტ $x(t) = x(t; w) \in O,\ t \in I$ ფუნქციას ეწოდება w ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, თუ იგი აკმაყოფილებს (1.2) საწყის პირობას. I-ზე უბან-უბან უწყვეტად წარმოებადია და (1.1) განტოლებას აკაყოფილებს ყველგან, გარდა სასრული რაოდენობა წერტილებისა.

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$|w| = |x_0| + \|u\| + \|v\|\,, \quad W_\varepsilon(w_0) = \{w \in W : |w - w_0| \le \varepsilon\},$$

სადაც

$$\|u\| = \sup\{|u(t)| : t \in I_1\},\ \|v\| = \sup\{|v(t)| : t \in I_2\},$$

$\varepsilon > 0$ ფიქსირებული რიცხვია, ხოლო $w_0 = (x_{00}, u_0(\cdot), v_0(\cdot)) \in W$ ფიქსირებული ელემენტია; გარდა ამისა,

$$\delta x_0 = x_0 - x_{00}\,,\ \delta u(t) = u(t) - u_0(t)\,,\ \delta v(t) = v(t) - v_0(t)\,,\ \delta w = w - w_0 = (\delta x_0, \delta u, \delta v)\,,$$

$$|\delta w| = |\delta x_0| + \|\delta u\| + \|\delta v\|\,.$$

δw ეწოდება w_0 ელემენტის შეშფოთება (ვარიაცია).

ვთქვათ $x_0(t) = x(t; w_0)$, $t \in I$ არის $w_0 \in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი, ანუ $x_0(t)$ არის შემდეგი კოშის ამოცანის

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_0(t), u_0(t-\theta), \nu_0(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} \nu_0(t+s)ds),$$

$$x(t_0) = x_{00}$$

ამონახსნი.

არსებობს $\varepsilon_1 > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ ყოველ $w \in W_{\varepsilon_1}(w_0)$ ელემენტს შეესაბამება ერთადერთი ამონახსნი $x(t; w)$, $t \in I$ (იხ. ლემა 2.1).

ამრიგად, ყოველი $w = w_0 + \delta w \in W_\varepsilon(w_0)$ ელემენტის შესაბამის შეშფოთებულ კოშის ამოცანას

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u(t-\theta), \nu(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} \nu(t+s)ds)$$

$$= f(t, x(t), u_0(t) + \delta u(t), u_0(t-\theta) + \delta u(t-\theta), \nu_0(t) + \delta \nu(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} [\nu_0(t+s) + \delta \nu(t+s)]ds),$$

$$x(t_0) = x_0 = x_{00} + \delta x_0$$

აქვს ერთადერთი ამონახსნი $x(t; w) = x(t; w_0 + \delta w)$, $t \in I$.

თეორემა 1.1. ვთქვათ $x_0(t) = x(t; w_0)$, $t \in I$ არის $w_0 = (x_{00}, u_0(\cdot), \nu_0(\cdot)) \in W$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_1 > 0$, რომ ნებისმიერი $\delta w \in W_{\varepsilon_1}(w_0)$ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$x(t;w) = x_0(t) + \delta x(t;\delta w) + o(t;\delta w)\,, \qquad (1.3)$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta w) = \Phi(t)\Bigg(\delta x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\xi)[\, f_u[\xi]\delta u(\xi) + f_{u_1}[\xi]\delta u(\xi-\theta) + f_v[\xi]\delta v(\xi)$$

$$+\, f_{v_1}[\xi]\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(\xi+s)ds]d\xi\Bigg), \qquad (1.4)$$

$$f_u[t] = f_u\Big(t, x_0(t), u_0(t), u_0(t-\theta), v(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v(t+s)ds\Big).$$

გარდა ამისა, $\Phi(t)$ არის

$$\dot z(t) = f_x[t]z(t),\; t \in I \qquad (1.5)$$

განტოლების ფუნდამენტური მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\Phi(t_0) = E$, ხოლო $\Phi^{-1}(t)$ მისი შებრუნებული;

$$\lim_{|\delta w|\to 0}\frac{o(t;\delta w)}{|\delta w|} = 0$$

თანაბრად $t \in I$ მიმართ; E არის ერთეულოვანი მატრიცა.

ზოგიერთი კომენტარი. $\Phi(t)\delta x_0$ გამოსახულება (1.4) ფორმულაში არის საწყისი x_{00} ვექტორის შეშფოთების ეფექტი. შესაკრები

$$\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\left[f_u[\xi]\delta u(\xi)+f_{u_1}[\xi]\delta u(\xi-\theta)\right]d\xi\ ,$$

(1.4) ფორმულაში არის $u_0(t)$ მართვის შეშფოთების ეფექტი. შესაკრები

$$\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\left[f_v[\xi]\delta u(\xi)+f_{v_1}[\xi]\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(\xi+s)ds\right]d\xi\ ,$$

(1.4) ფორმულაში არის $v_0(t)$ მართვის შეშფოთების ეფექტი.

კოშის ფორმულის ძალით (იხ. ლემა 2.5) შეიძლება დავასკვნათ, რომ $\delta x(t;\delta w)$ არის შემდეგი არაერთგვაროვანი წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი

$$\delta\dot{x}(t)=f_x[t]\delta x(t)+f_u[t]\delta u(t)+f_{u_1}[t]\delta u(t-\theta)+f_v[t]\delta v(t)+f_{v_1}[t]\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(t+s)ds,\ t\in I,\quad (1.6)$$

და აკმაყოფილებს საწყის პირობას

$$\delta x(t_0)=\delta x_0\,. \qquad (1.7)$$

თუ $|\delta w|$ მცირეა, მაშინ (1.3)-ში შეიძლება მოვახდინოთ $o(t;\delta w)$ შესაკრების იგნორირება. მივიღებთ

$$x(t;w)\approx x_0(t)+\delta x(t;\delta w)\,.$$

აქედან გამომდინარე, $x_0(t)+\delta x(t;\delta w)$ შეიძლება ჩავთვალოთ შეშფოთებული განტოლების მიახლოებით ამონახსნად. ამრიგად, მიახლოებითი ამონახსნის მოსაძებნად საკმარისია ერთის მხრივ-ვიპოვოთ მატრიცები $\Phi(t)$ და $\Phi^{-1}(t)$, ხოლო მეორეს მხრივ-ვიპოვოთ (1.6)-(1.7) ამოცანის ამონახსნი.

თეორემა 1.2. ვთქვათ

$$f(t,x,u,u_1,v,v_1)=A(t)x+B(t)u+C(t)u_1+Q(t)v+G(t)v_1+F(t)$$

და $x_0(t)=x(t;w_0)$, სადაც $w_0=(x_{00},u_0(\cdot),v_0(\cdot))\in W$, არის თავდაპირველი ამოცანის

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u_0(t)+C(t)u_0(t-\theta)+Q(t)v_0(t)+G(t)\int_{-\sigma}^{-\tau}v(t+s)ds+F(t),t\in I,$$

$$x(t_0)=x_{00}$$

ამონახსი. არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_1>0$, რომ ნებისმიერი $\delta w\in W_{\varepsilon_1}(w_0)$-თვის შეშფოთებული ამოცანის

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)[u_0(t)+\delta u(t)]+C(t)[u_0(t-\theta)+\delta u(t-\theta)]$$

$$+Q(t)[v_0(t)+\delta v(t)]+G(t)\int_{-\sigma}^{-\tau}[v(t+s)+\delta v(t+s)]ds+F(t),t\in I,$$

$$x(t_0)=x_0$$

ამონახსნი $x(t;w)$, სადაც $w=w_0+\delta w$, წარმოიდგინება ფორმულით

$$x(t;w)=x_0(t)+\delta x(t;\delta w)+o(t;\delta w),$$

სადაც

$$\delta x(t;\delta w)=\Phi(t)\left(\delta x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)[B(\xi)\delta u(\xi)+C(\xi)\delta u(\xi-\theta)+Q(\xi)\delta v(\xi)+G(\xi)\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(\xi+s)ds]d\xi\right),$$

$\Phi(t)$ არის

$$\dot{z}(t) = A(t)z(t),\ t \in I$$

განტოლების ფუნდამენტური მატრიცა, ხოლო $\Phi^{-1}(t)$ მისი შებრუნებული.

თეორემა 1.2 არის თეორემა 1.1-ის შედეგი.

ახლა ჩამოვაყალიბოთ თეორემა 1.1-ის ანალოგი მოთხოვნა-მიწოდების მოდელისათვის. P -თი აღვნიშნოთ სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტის წერტილების მქონე უბან-უბან უწყვეტი $p(t) \in [a,b], t \in I_1$, ფუნქციების (მართვების) სიმრავლე. Q -თი აღვნიშნოთ სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტის წერტილების მქონე უბან-უბან უწყვეტი $q(t) \in [c,d], t \in I_2$ ფუნქციების (მართვების)სიმრავლე.

ყოველ $\mu = (y_0, p(\cdot), q(\cdot)) \in \Pi = R \times P \times Q$ ელემენტს შევუსაბამოთ სკალარული დიფერენციალური განტოლება მართვებში თავმოყრილი და განაწილებული დაგვიანებებით

$$\dot{y}(t) = D(t, p(t), q(t)) - S(t, p(t-\theta), \int_{-\sigma}^{-\tau} q(t+s)ds),\ t \in I \qquad (1.8)$$

საწყისი პირობით

$$y(t_0) = y_0 .$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$|\mu| = |y_0| + \|p\| + \|q\|, \quad \Pi_\varepsilon(\mu_0) = \{\mu \in \Pi : |\mu - \mu_0| \le \varepsilon\},$$

სადაც

$$\|p\| = \sup\{|p(t)| : t \in I_1\}, \ \|q\| = \sup\{|q(t)| : t \in I_2\},$$

$\varepsilon > 0$ ფიქსირებული რიცხვია, ხოლო $\mu_0 = (y_{00}, p_0(\cdot), q_0(\cdot)) \in \Pi$ ფიქსირებული ელემენტი; გარდა ამისა,

$$\delta y_0 = y_0 - y_{00}, \ \delta p(t) = p(t) - p_0(t), \ \delta q(t) = q(t) - q_0(t), \ \delta\mu = \mu - \mu_0 = (\delta y_0, \delta p, \delta q),$$

$$|\delta\mu| = |\delta y_0| + \|\delta p\| + \|\delta q\|.$$

$\delta\mu$ ეწოდება μ_0 ელემენტის შეშფოთება (ვარიაცია). (1.8) სკალარული განტოლების მარჯვენა მხარე არ არის დამოკიდებული y ცვლადზე, ამიტომ (1.5) განტოლების ანალოგი სკალარულია და აქვს სახე

$$\dot{z}(t) = 0. \tag{1.9}$$

ცხადია, რომ (1.9) განტოლების ფუნდამენტური მატრიცა და მისი შებრუნებული იქნება $\Phi(t) \equiv 1$ და $\Phi^{-1}(t) \equiv 1$.

თეორემა 1.3. ვთქვათ $y_0(t) = y(t; \mu_0), \ t \in I$ არის $\mu_0 = (y_{00}, p_0(\cdot), q_0(\cdot)) \in \Pi$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_1 > 0$, რომ ნებისმიერი $\delta\mu \in W_{\varepsilon_1}(\mu_0)$ ადგილი აქვს შემდეგ წარმოდგენას

$$y(t; \mu) = y_0(t) + \delta y(t; \delta\mu) + o(t; \delta\mu),$$

სადაც

$$\delta y(t; \delta\mu) = \left(\delta y_0 + \int_{t_0}^{t} [D_p[\xi]\delta p(\xi) - S_{p_1}[\xi]\delta p(\xi - \theta) + D_q[\xi]\delta q(\xi) \right.$$

$$-S_{q_1}[\xi]\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta q(\xi+s)ds]d\xi\Bigg),$$

$$D_p[\xi]=D_p(\xi,p_0(\xi),q_0(\xi)),S_{p_1}[\xi]=S_{p_1}(\xi,p_0(\xi-\theta),\int_{-\sigma}^{-\tau}q_0(\xi+s)ds).$$

თეორემა 1.3 არის თეორემა 1.1-ის შედეგი.

§ 2. დამხმარე დებულებები

ლემა 2.1. ვთქვათ $x_0(t)=x(t;w_0),\ t\in I$ არის $w_0=(x_{00},u_0(\cdot),v_0(\cdot))$ ელემენტის შესაბამისი ამონახსნი. მაშინ არსებობს ისეთი რიცხვი $\varepsilon_1>0$, რომ ნებისმიერი $w=(x_0,u(\cdot),v(\cdot))\in W_{\varepsilon_1}(w_0)$ ელემენტისათვის არსებობს შესაბამისი ერთადერთი ამონახსნი $x(t;w),\ t\in I$. ამასთან, $x(t;w)\in K_1,\ u(t)\in U_1$ და $v(t)\in V_1$, სადაც $K_1\subset O$ არის $x_0(I)=\{x_0(t):t\in I\}$ სიმრავლის მიდამოს შემცველი ამოზნექილი კომპაქტი, $U_1\subset U$ არის $clu_0(l)$ სიმრავლის მიდამოს შემცველი ამოზნექილი კომპაქტი, $V_1\subset V$ არის $clv_0(l)$ სიმრავლის მიდამოს შემცველი ამოზნექილი კომპაქტი.

ლემა 2.1 გამომდინარეობს თეორემა 1.4-დან [4], ნაშრომში განხილული განტოლების სპეციფიკის გათვალისწინებით.

ლემა 2.2. ვთქვათ $K_1\subset O,\ U_1\subset U$ და $V_1\subset V$ ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლეებია. ფუნქცია $f(t,x,u,u_1,v,v_1)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას

$$\left|f(t,x',u',u_1',v',v')-f(t,x'',u'',u_1'',v'',v_1'')\right|\le L\left(\left|x'-x''\right|+\left|u'-u''\right|+\left|u_1'-u_1''\right|+\left|v'-v''\right|+\left|v_1'-v_1''\right|\right),$$

$$t\in I,\ \forall(x',x'')\in K_1^2,\ \ \forall(u',u_1',u'',u_1'')\in U_1^4\ ,\forall(v',v_1',v'',v_1'')\in V_1^4 .$$

დამტკიცება. ადვილი მისახვედრია, რომ

$$\left|f(t,x',u',u_1',v',v')-f(t,x'',u'',u_1'',v'',v_1'')\right|$$

$$\le\left|\int_0^1\frac{d}{d\xi}f(t,x''+\xi(x'-x''),u''+\xi(u'-u''),u_1''+\xi(u_1''-u_1'),v''+\xi(v'-v''),v_1''+\xi(v_1'-v_1''))d\xi\right|$$

$$\le \int_0^1 \left[\left| f_x(t,\cdot) \right| \left| x^{'} - x^{''} \right| + \left| f_u(t,\cdot) \right| \left| u^{'} - u^{''} \right| + \left| f_{u_1}(t,\cdot) \right| \left| u_1^{'} - u_1^{''} \right| + \left| f_v(t,\cdot) \right| \left| v^{'} - v^{''} \right| + \left| f_{v_1}(t,\cdot) \right| \left| v_1^{'} - v_1^{''} \right| \right] d\xi$$

$$\le L \left(\left| x^{'} - x^{''} \right| + \left| u^{'} - u^{''} \right| + \left| u_1^{'} - u_1^{''} \right| + \left| v^{'} - v^{''} \right| + \left| v_1^{'} - v_1^{''} \right| \right),$$

სადაც

$$f_x(t,\cdot) = f_x(t, x^{''} + \xi(x^{'} - x^{''}), u^{''} + \xi(u^{'} - u^{''}), u_1^{''} + \xi(u_1^{'} - u_1^{''}), v^{''} + \xi(v^{'} - v^{''}), v_1^{''} + \xi(v_1^{'} - v_1^{''})),$$

$$L = \max\{L_x, L_u, L_{u_1}, L_v, L_{v_1}\},$$

$$L_x = \sup\{ \left| f_x(t,\cdot) \right| : t \in I, (x^{'}, x^{''}) \in K_1^2, (u^{'}, u^{''}, u_1^{'}, u_1^{''}) \in U_1^4, (v^{'}, v^{''}, v_1^{'}, v_1^{''}) \in V_1^4 \}.$$

K_1, U_1 და V_1 სიმრავლეების ამოზნექილობიდან გამომდინარეობს, რომ

$$x^{''} + \xi(x^{'} - x^{''}) \in K_1,\ u^{''} + \xi(u^{'} - u^{''}) \in U_1, u_1^{''} + \xi(u_1^{'} - u_1^{''}) \in U_1,\ v^{''} + \xi(v^{'} - v^{''}) \in V_1,$$

$$v_1^{''} + \xi(v_1^{'} - v_1^{''}) \in V_1.$$

K_1, U_1 და V_1 სიმრავლეების კომპაქტურობიდან დავასკვნით $L_x, L_u, L_{u_1}, L_v, L_{v_1}$ რიცხვების არსებობას.

ლემა 2.3 (გრონუოლ-ბელმანის უტოლობა). ვთქვათ $g(t) \ge 0$ და $\psi(t) \ge 0$ უწყვეტი ფუნქციებია ინტერვალზე I. გარდა ამისა, შესრულებულია უტოლობა

$$g(t) \le c + \int_{t_0}^{t} \psi(\xi) g(\xi) d\xi, \qquad (2.1)$$

სადაც $c \geq 0$ რიცხვია. მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$g(t) \leq c e^{\int_{t_0}^{t_1} \psi(\xi) d\xi}. \tag{2.2}$$

დამტკიცება. ვთქვათ $c > 0$. (2.1) უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{g(t)}{c + \int_{t_0}^{t} \psi(\xi) g(\xi) d\xi} \leq 1.$$

გავამრავლოთ ორივე მხარე $\psi(t)$-ზე

$$\frac{\psi(t) g(t)}{c + \int_{t_0}^{t} \psi(\xi) g(\xi) d\xi} \leq \psi(t). \tag{2.3}$$

ცხადია, რომ

$$\frac{d}{dt}\left[c + \int_{t_0}^{t} \psi(\xi) g(\xi) d\xi\right] = \psi(t) g(t). \tag{2.4}$$

ვაინტეგროთ (2.3) t_0-დან t-დე, (2.4)-ის გათვალისწინებით, გვექნება

$$\ln\left[c + \int_{t_0}^{t} \psi(\xi) g(\xi) d\xi\right] - \ln c \leq \int_{t_0}^{t} \psi(\xi) d\xi.$$

აქედან გამომდინარეობს შეფასება

$$\frac{c+\int_{t_0}^{t}\psi(\xi)g(\xi)d\xi}{c}\le e^{\int_{t_0}^{t}\psi(\xi)d\xi}.$$

ცხადია,

$$c+\int_{t_0}^{t}\psi(\xi)g(\xi)d\xi\le ce^{\int_{t_0}^{t_1}\psi(\xi)d\xi}.$$

ამ უტოლობის გამოყენებით (2.1)-დან, $c>0$ შემთხვევაში, მიიღება (2.2). თუ (2.1) და (2.2) ფორმულებში გადავალთ ზღვარზე, როცა $c\to+0$ მაშინ შესაბამისად მივიღებთ

$$g(t)\le\int_{t_0}^{t}\psi(\xi)g(\xi)d\xi$$

და

$$g(t)\le 0.$$

ამრიგად (2.2) სამართლიანია $c\ge 0$ შემთხვევისათვის.

განვიხილოთ წრფივი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემა

$$\dot{x}=A(t)x+\varsigma(t),\ t\in I,\ x\in R^n, \tag{2.5}$$

$$x(t_0)=x_0, \tag{2.6}$$

სადაც $t \to A(t)$ და $t \to \varsigma(t)$ არის უბან-უბან უწყვეტი მატრიც და ვექტორული ფუნქციები, სასრული რაოდენობა პირველი გვარის წყვეტის წერტილებით. არსებობს (2.5)-(2.6) ამოცანის ერთადერთი ამონახსნი $x(t), t \in I$.

$\Phi(t)$ -თი აღვნიშნოთ ერთგვაროვანი განტოლების

$$\dot{x} = A(t)x,\ t \in I,\ x \in R^n$$

ფუნდამენტური მატრიცა, რომლის განზომილებაა $n \times n$-ზე. ფუნდამენტური მატრიცა ყოველთვის არსებობს და აკმაყოფილებს მატრიცულ განტოლებას

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t),\ t \in I. \qquad (2.7)$$

ლემა 2.4. ფუნდამენტური მატრიცის შებრუნებული $\Phi^{-1}(t)$ აკმაყოფილებს ტოლობას

$$\dot{\Phi}^{-1}(t) = -\Phi^{-1}(t)A(t),\ t \in I. \qquad (2.8)$$

დამტკიცება. ცხადია ტოლობა

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(t) = E, t \in I,$$

სადაც E ერთეულოვანი მატრიცაა. გაწარმოების შედეგად მივიღებთ

$$\dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t) + \Phi(t)\dot{\Phi}^{-1}(t) = 0, t \in I.$$

შემდეგ, (2.7) ძალით გვექნება

$$A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t) + \Phi(t)\dot{\Phi}^{-1}(t) = 0.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$A(t)+\Phi(t)\dot{\Phi}^{-1}(t)=0.$$

ტოლობა გავამრავლოთ $\Phi^{-1}(t)$ -ზე, მივიღებთ (2.8)-ს.

ლემა 2.5 (კოშის ფორმულა). (2.5)-(2.6) ამოცანის ამონახსნი $x(t), t\in I$ წარმოიდგინება ფორმულით

$$x(t)=\Phi(t)\left(x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\varsigma(s)ds\right),$$

სადაც $\Phi(t)$ არის ფუნდამენტური მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\Phi(t_0)=E.$

დამტკიცება. განტოლება

$$\dot{x}(s)=A(s)x(s)+\varsigma(s),\ s\in I$$

გავამრავლოთ $\Phi^{-1}(s)$ -ზე და მიღებული ტოლობა ვაინტეგროთ

$$\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\dot{x}(s)ds=\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)A(s)x(s)ds+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\varsigma(s)ds. \qquad (2.9)$$

ნაწილობითი ინტეგრების შედეგად მივიღებთ

$$\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\dot{x}(s)ds=\Phi^{-1}(t)x(t)-\Phi^{-1}(t_0)x(t_0)-\int_{t_0}^{t}\dot{\Phi}^{-1}(s)x(s)ds$$

$$= \Phi^{-1}(t)x(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)x(s)ds\,.$$

(2.9)-დან უკანასკნელი ტოლობის გათვალისწინებით და გარკვეული დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ

$$\Phi^{-1}(t)x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\dot{\Phi}^{-1}(s) + \Phi^{-1}(s)A(s)\right]x(s)ds + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\varsigma(s)ds\,.$$

ვისარგებლოთ (2.8) ტოლობით და ორივე მხარე გავამრავლოთ $\Phi(t)$-ზე, მივიღებთ დასამტკიცებელ ფორმულას.

§ 3. ლემა ნაზრდის შეფასების შესახებ

ლემა 2.1 საშუალებას იძლევა შემოვიღოთ $x_0(t), t \in I$ ამონახსნის ნაზრდი:

$$\Delta x(t) = \Delta x(t;\delta w) = x(t;w) - x_0(t), t \in I, \quad w \in W_{\varepsilon_1}(w_0), \delta w = w - w_0.$$

ლემა 3.1. ნებისმიერი $w \in W_{\varepsilon_1}(w_0)$ ელემენტისათვის ადგილი აქვს უტოლობას

$$\max_{t\in I} |\Delta x(t)| \le O(\delta w),$$

სადაც

$$\lim_{|\delta w|\to 0} \frac{O(\delta w)}{|\delta w|} < \infty.$$

დამტკიცება. ფუნქცია $\Delta x(t)$ ფუნქცია I ინტერვალზე აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta} x(t) = \dot{x}(t;w) - \dot{x}_0(t) = \frac{d}{dt}\big(x_0(t) + \Delta x(t)\big) - \dot{x}_0(t) = a(t;\delta w), \qquad (3.1)$$

სადაც

$$a(t;\delta w) = f(t, x_0(t) + \Delta x(t), u_0(t) + \delta u(t), u_0(t-\theta) + \delta u(t-\theta), v_0(t) + \delta v(t),$$

$$\int_{-\sigma}^{-\tau} [v_0(t+s) + v_0(t+\nu)])ds) - f[t];$$

$$f[t] = f(t, x_0(t), u_0(t), u_0(t-\theta), v_0(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v_0(t+s)ds).$$

განტოლება (3.1) ჩავწეროთ ინტეგრალური სახით

$$\Delta x(t) = \delta x_0 + \int_{t_0}^{t} a(\xi;\delta w)d\xi.$$

აქედან გამომდინარეობს

$$\left|\Delta x(t)\right| \le \left|\delta w\right| + a_1(t;\delta w), \tag{3.2}$$

სადაც

$$a_1(t;\delta w) = \int_{t_0}^{t} \left|a(\xi;\delta w)\right| d\xi.$$

$K_1 \subset O, U_1 \subset U$ და $V_1 \subset V$ ამოზნექილი კომპაქტური სიმრავლეებისათვის არსებობს მუდმივი $L > 0$, რომ ფუნქცია $f(t,x,u,u_1,v,v_1)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას (იხ. ლემა 2.2):

$$\left| f(t,x',u',u_1',v',v') - f(t,x'',u'',u_1'',v'',v_1'')\right| \le L\left(\left|x' - x''\right| + \left|u' - u''\right| + \left|u_1' - u_1''\right| + \left|v' - v''\right| + \left|v_1' - v_1''\right|\right),$$

$$t \in I,\ \forall (x',x'') \in K_1^2,\ \ \forall (u',u_1',u'',u_1'') \in U_1^4\ ,\forall (v',v_1',v'',v_1'') \in V_1^4.$$

ლიფშიცის პირობის გამოყენებით გვექნება

$$a_1(t;\delta w) \le \int_{t_0}^{t} L\left(\left|\Delta x(\xi)\right| + \left|\delta u(\xi)\right| + \left|\delta u(\xi-\theta)\right| + \left|\delta v(\xi)\right| + \int_{-\sigma}^{-\tau} \left|\delta v(\xi+s)\right| ds \right)$$

$$\le L(3+\sigma+\tau)\left|\delta w\right| + L\int_{t_0}^{t} \left|\Delta x(\xi)\right| d\xi .$$

ამ უტოლობის გათვალისწინებით (3.2)-დან გამომდინარეობს

$$|\Delta x(t)| \le [1 + L(3 + \sigma + \tau)]|\delta w| + L\int_{t_0}^{t} |\Delta x(\xi)| d\xi \,.$$

ვისარგებლოთ გრონუოლ-ბელმანის უტოლობით, გვექნება

$$|\Delta x(t)| \le [1 + L(3 + \sigma + \tau)]|\delta w| e^{L(t_1 - t_0)} .$$

ამრიგად,

$$\max_{t \in I} |\Delta x(t)| \le O(\delta w) ,$$

სადაც

$$O(\delta w) = [1 + L(3 + \sigma + \tau)]|\delta w| e^{L(t_1 - t_0)} .$$

ცხადია,

$$\lim_{|\delta w| \to 0} \frac{O(\delta w)}{|\delta w|} = [1 + L(3 + \sigma + \tau)] e^{L(t_1 - t_0)} < \infty .$$

ლემა 3.1 დამტკიცებულია.

§ 4. თეორემა 1.1 დამტკიცება

ფუნქცია

$$\Delta x(t) = \Delta x(t;\delta w) = x(t;w) - x_0(t), t \in I$$

აკმაყოფილებს განტოლებას

$$\dot{\Delta} x(t) = \dot{x}(t;w) - \dot{x}_0(t) = \frac{d}{dt}\big(x_0(t) + \Delta x(t)\big) - \dot{x}_0(t) = a(t;\delta w) \qquad (4.1)$$

საწყისი პირობით

$$\Delta x(t_0) = \delta x_0,$$

სადაც

$$a(t;\delta w) = f(t, x_0(t) + \Delta x(t), u_0(t) + \delta u(t), u_0(t-\theta) + \delta u(t-\theta), v_0(t) + \delta v(t),$$

$$\int_{-\sigma}^{-\tau} [v_0(t+s) + \delta v_0(t+s)])ds) - f[t];$$

$$f[t] = f(t, x_0(t), u_0(t), u_0(t-\theta), v_0(t), \int_{-\sigma}^{-\tau} v_0(t+s))ds).$$

(4.1) განტოლება ასე გადავწეროთ

$$\dot{\Delta} x(t) = f_x[t]\Delta x(t) + f_u[t]\delta u(t) + f_{u_1}[t]\delta u(t-\theta) + f_v[t]\delta v(t) + f_{v_1}[t]\int_{-\sigma}^{-\tau} \delta v(t+s)ds + r(t;\delta w), \quad (4.2)$$

სადაც

$$r(t;\delta w) := a(t;\delta w) - f_x[t]\Delta x(t) - f_u[t]\delta u - f_{u_1}[t]\delta u(t-\theta) - f_v[t]\delta v(t) - f_{v_1}[t]\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(t+s)ds\,. \quad (4.3)$$

კოშის ფორმულის გამოყენებით (4.2) განტოლების ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით

$$\Delta x(t) = \Phi(t)\left\{\delta x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\Big[f_u[\xi]\delta u(\xi) + f_{u_1}[\xi]\delta u(\xi-\theta) + f_v[\xi]\delta v(\xi)\right.$$

$$\left. + f_{v_1}[\xi]\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(\xi+s)ds\Big]d\xi\right\} + R(t;\delta w) \qquad (4.4)$$

(იხ. ლემა 2.5), სადაც $\Phi(t)$ არის

$$\dot{x} = A(t)x,\ t\in I,\ x\in R^n$$

განტოლების ფუნდამენტური მატრიცა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $\Phi(t_0)=E,$ ხოლო

$R(t;\delta w)$ აქვს სახე

$$R(t;\delta w) = \Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)r(\xi;\delta w)d\xi.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$f[t;\varsigma,\delta w] =$$

$$= f\left(t, x_0(t)+\varsigma\,\Delta x(t), u_0(t)+\varsigma\,\delta u(t), u_0(t-\theta)+\varsigma\delta u(t-\theta), v_0(t)+\varsigma\delta v(t), \int_{-\sigma}^{-\tau}[v_0(t+s)+\delta v(t+s)]ds\right);$$

$$\rho_x(t;\varsigma,\delta w) = f_x[t;\varsigma,\delta w] - f_x[t],\ \rho_u(t;\varsigma,\delta w) = f_u[t;\varsigma,\delta w] - f_u[t],$$

$$\rho_{u_1}(t;\varsigma,\delta w) = f_{u_1}[t;\varsigma,\delta w] - f_{u_1}[t],\ \rho_v(t;\varsigma,\delta w) = f_v[t;\varsigma,\delta w] - f_v[t],$$

$$\rho_{v_1}(t;\varsigma,\delta w) = f_{v_1}[t;\varsigma,\delta w] - f_{v_1}[t].$$

ადვილი მისახვედრია, რომ

$$a(t;\delta w) = \int_0^1 \frac{d}{d\varsigma} f[t;\varsigma,\delta w]d\varsigma = \int_0^1 [\, f_x[t;\varsigma,\delta w]\Delta x(t) + f_u[t;\varsigma,\delta w]\delta u(t) + f_{u_1}[t;\varsigma,\delta w]\delta u(t-\theta)$$

$$+ f_v[t;\varsigma,\delta w]\delta v(t) + f_{v_1}[t;\varsigma,\delta w]\int_{-\sigma}^{-\tau} \delta v(t+s)ds]d\varsigma = \left[\int_0^1 \rho_x(t;\varsigma,\delta w)d\varsigma\right]\Delta x(t)$$

$$+\left[\int_0^1 \rho_u(t;\varsigma,\delta w)d\varsigma\right]\delta u(t) + \left[\int_0^1 \rho_{u_1}(t;\varsigma,\delta w)d\varsigma\right]\delta u(t-\theta) + \left[\int_0^1 \rho_v(t;\varsigma,\delta w)d\varsigma\right]\delta v(t)$$

$$+\left[\int_0^1 \rho_{v_1}(t;\varsigma,\delta w)d\varsigma\right]\int_{-\sigma}^{-\tau} \delta v(t+s)ds - f_x[t]\Delta x(t) - f_u[t]\delta u(t) - f_{u_1}[t]\delta u(t-\theta)$$

$$+ f_v[t]\delta v(t) + f_{v_1}[t]\int_{-\sigma}^{-\tau} \delta v(t+s)ds.$$

უკანასკნელი თანაფარდობისა და (4.3) გათვალისწინებით $R(t;\delta w)$ -თვის მივიღეთ

$$R(t;\delta w) = \sum_{i=1}^{5} R_i(t;\delta w),$$

სადაც

$$R_1(t;\delta w)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\rho_x(\xi;\delta w)\Delta x(\xi)d\xi\,,\quad \rho_x(\xi;\delta w)=\int_0^1\rho_x(\xi;\varsigma,\delta w)d\varsigma.$$

$$R_2(t;\delta w)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\rho_u(\xi;\delta w)\delta u(\xi)d\xi\,,\quad \rho_u(\xi;\delta w)=\int_0^1\rho_u(\xi;\varsigma,\delta w)d\varsigma.$$

$$R_3(t;\delta w)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\rho_{u_1}(\xi;\delta w)\delta u(\xi-\theta)d\xi\,,\quad \rho_{u_1}(\xi;\delta w)=\int_0^1\rho_{u_1}(\xi;\varsigma,\delta w)d\varsigma.$$

$$R_4(t;\delta w)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\rho_v(\xi;\delta w)\delta v(\xi)d\xi\,,\quad \rho_v(\xi;\delta w)=\int_0^1\rho_v(\xi;\varsigma,\delta w)d\varsigma.$$

$$R_5(t;\delta w)=\Phi(t)\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\rho_{v_1}(\xi;\delta w)(\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(\xi+s)ds)d\xi\,,\quad \rho_{v_1}(\xi;\delta w)=\int_0^1\rho_{v_1}(\xi;\varsigma,\delta w)d\varsigma.$$

სამართლიანია შემდეგი შეფასებები (იხ. ლემა 3.1):

$$\left|R_1(t;\delta w)\right|\le\|\Phi\|\left\|\Phi^{-1}\right\|O(\delta w)\rho_x(\delta w),\quad \rho_x(\delta w)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\rho_x(\xi;\delta w)\right|d\xi,$$

$$\left|R_2(t;\delta w)\right|\le\|\Phi\|\left\|\Phi^{-1}\right\|\left|\delta w\right|\rho_u(\delta w),\ \rho_u(\delta w)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\rho_u(\xi;\delta w)\right|d\xi,$$

$$\left|R_3(t;\delta w)\right|\le\|\Phi\|\left\|\Phi^{-1}\right\|\left|\delta w\right|\rho_{u_1}(\delta w),\ \rho_{u_1}(\delta w)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\rho_{u_1}(\xi;\delta w)\right|d\xi,$$

$$\left|R_4(t;\delta w)\right|\le\|\Phi\|\left\|\Phi^{-1}\right\|\left|\delta w\right|\rho_v(\delta w),\ \rho_v(\delta w)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\rho_v(\xi;\delta w)\right|d\xi,$$

$$\left|R_5(t;\delta w)\right| \le \|\Phi\|\|\Phi^{-1}\|\|\delta w\|\rho_{v_1}(\delta w),\ \rho_{v_1}(\delta w)=\int_{t_0}^{t_1}\left|\rho_{v_1}(\xi;\delta w)\right|d\xi,$$

სადაც

$$\|\Phi\| = \max_{t\in[t_0,t_1]}|\Phi(t)|.$$

რიმანის ინტეგრალის ქვეშ ზღვარზე გადასვლის თეორემის ძალით დავასკვნით, რომ

$$\lim_{|\delta\mu|\to 0}\rho_x(\delta\mu)=0,\ \lim_{|\delta\mu|\to 0}\rho_u(\delta\mu)=0,\ \lim_{|\delta\mu|\to 0}\rho_{u_1}(\delta\mu)=0,$$

$$\lim_{|\delta\mu|\to 0}\rho_v(\delta\mu)=0,\ \lim_{|\delta\mu|\to 0}\rho_{v_1}(\delta\mu)=0.$$

ამრიგად,

$$\left|R_i(t;\delta\mu)\right| \le o(t;\delta w), i=1,...,5$$

ე. ი.

$$\left|R(t;\delta\mu)\right| = o(t;\delta w). \tag{4.5}$$

(4.4)-დან (4.5)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$x(t;\mu)=x_0(t)+\Phi(t)\Big\{\delta x_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(\xi)\big[f_u[\xi]\delta u(\xi)+f_{u_1}[\xi]\delta u(\xi-\theta)+f_v[\xi]\delta v(\xi)$$

$$+f_{v_1}\int_{-\sigma}^{-\tau}\delta v(\xi+s)ds\Big]d\xi\Big\}+o(t;\delta w).$$

თეორემა დამტკიცებულია.

დასკვნა

საწყისი მონაცემების შეშფოთებით მიღებული სამართი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის მართვებში განაწილებული და დისკრეტული დაგვიანებით, დამტკიცებულია ამონახსნის ანალიზური წარმოდგენის ფორმულა სამი შესაკრების სახით, სადაც პირველი შესა-კრები არის თავდაპირველი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი; მეორე არის მთავარი შესაკრები-შეშფოთებების მიმართ წრფივი ოპერატორი, რომლის სახე ცხადი სახით არის აგებული; მესამე შესაკრები არის შეშფოთებასთან შედარებით მაღალი რიგის უსასრულოდ მცირე. საწყისი მონაცემის ქვეშ იგულისხმება საწყისი ვექტორის და მართვის ფუნქციების ერთობლიობა. გარდა ამისა, წრფივი ოპერატორის სახე დაკონკრეტებულია წრფივი დიფერენციალური განტოლებისთვის და მოთხოვნა-მიწოდების საბაზრო ურთიერთობის დიფერენციალური მოდელისთვის.

სიახლეს ნაშრომში წარმოადგენს ის გარემოება, რომ ამონახსნის ანალიზური წარმოდგენის ფორმულა და ოპერატორის სახე დადგენილია დიფერენციალური განტოლებისთვის განაწი-ლებული დაგვიანებით მართვებში. მიღებული შედეგები შეიძლება გამოიყენებული იქნეს დიფერენციალური მათემატიკური მოდელების სენსიტიურ ანალიზში, შეშფოთებული გან-ტოლების მიახლოებითი ამონახსნის მოძებნაში და ოპტიმალური მართვის თეორიაში.

ლიტერატურა

1. Barradas I. Immunological barrier for infections diseases. *Applicationes Mathemicae*, **24** (3) (1997), 289-297.

2. Andreeva E. A., Mazurova I. S. Optimal control in a predator-prey model with lumped and distributed delay. *Physical and Mathematical Sciences*, **9** (2014), 1220-1224.

3. Tadumadze T., Dvalishvili Ph., Shavadze T. On the representation of solution of the perturbed controlled differential equation with delay and continuous initial condition. *Appl. Comput. Math.,* **18** (3) ,(2019), 305-315.

4. Tadumadze T. Variation formulas of solutions for functional differential equations with several constant delays and their applications in optimal control problems. *Mem. Diff. Eq. Math. Phys.*, **70**(2017), 7-97.

5. Nachaoui A., Shavadze T. and Tadumadze T. The Local Representation Formula of Solution for the Perturbed Controlled Differential Equation with Delay and Discontinuous Initial Condition, *Mathematics* 2020, **8**(10), 1845; https://doi.org/10.3390/math8101845.

6. რ. გამყრელიძე, ოპტიმალური მართვის საფუძვლები, ილიას სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, თბილისი, 2017.