ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ჰილბერტის გარდაქმნა L^p სივრცეებში

გოგი კეჟერაძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ხელმძღვანელი: ანა დანელია,
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

თბილისი

2021 წ

სარჩევი

ანოტაცია

მოცემულ საბაკალავრო ნაშრომში ჩვენ ვსწავლობთ ჰილბერტის გარდაქმნის ყოფაქცევას $L^p(p > 1)$ სივრციდან აღებულ გარკვეულ ფუნქციათა კლასში. სახელდობრ, უწყვეტობის მოდულის ტერმინებში მიღებულია პირდაპირი შეფასებები განზოგადებული ლიფშიცის კლასიდან აღებული ფუნქციების ჰილბერტის გარდაქმნისთვის.

In the present work we study the behavior of Hilbert transform in some class of function from the space L^p $(p > 1)$. Namely, in terms of modulus of continuity there is obtained direct estimates for the Hilbert transform of the functions from the generalized Lipschitz class.

შესავალი

მოცემული საბაკალავრო ნაშრომი შედგება: შესავლისაგან, სამი პარაგრაფისგან და გამოყენებული ლიტერატურის სიისაგან. პირველ პარაგრაფში მოყვანილია ძირითადი აღნიშვნები, მეორე პარაგრაფში მოყვანილია ზოგიერთი ცნობილი ფაქტი ჰილბერტის გარდაქმნის შესახებ, მესამე პარაგრაფში კი მოყვანილია ძირითადი შედეგი.

ჰილბერტის გარდაქმნა არის სინგულარული ოპერატორი, რომელიც წარმოადგენს ერთ–ერთ ყველაზე მნიშვნელოვან წრფივ ოპერატორს ჰარმონიულ ანალიზში. ეს ოპერატორი განხილული იყო ჰილბერტის მიერ, სწორედ ამიტომ ეწოდება მას ჰილბერტის გარდაქმნა.

წარმოდგენილ საბაკალავრო ნაშრომში ჩვენ ვსწავლობთ ჰილბერტის გარდაქმნის ყოფაქცევას L^p სივრციდან აღებულ გარკვეულ ფუნქიათა კლასში. სახელდობრ, დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა.

თეორემა. *ვთქვათ, ω უწყვეტობის მოდულია და*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty.$$

თუ f ფუნქცია ეკუთვნის $L^p(-\infty, \infty)$ $(p > 1)$ და აკმაყოფილებს ლიფშიცის განზოგადებულ პირობას

$$|f(x+h) - f(x)| < K\omega(h)(K = const)$$

თანაბრად ყოველი x–თვის, როცა $h \to 0$, მაშინ ჰილბერტის გარდაქმნა $H_f(x)$ არსებობს ყველა x–თვის, ეკუთვნის $L^p(-\infty, \infty)$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$|H_f(x+h) - H_f(x)| \leq A\Big(\int_0^h \frac{\omega(t)}{t} dt + h \int_h^1 \frac{\omega(t)}{t^2} dt\Big),$$

სადაც A აბსოლუტური მუდმივია.

1. ძირითადი აღნიშვნები და განსაზღვრებები

ვთქვათ, $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$) ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლეა. როგორც ვიცით, $L^p(-\infty, \infty)$ ($p \geq 1$) აღნიშნავს ლებეგის აზრით p ხარისხად ინტეგრებად ზომად ფუნქციათა კლასს

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty,$$

შემდეგი ნორმით

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \Big)^{\frac{1}{p}}.$$

ვთქვათ, $f \in L^p(\mathbb{R})$, მაშინ გამოსახულებას

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t)}{t} dt$$

ეწოდება მოცემული f ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნა. შევნიშნოთ, რომ ინტეგრალი ამ გამოსახულებაში გაიგება კოშის აზრით

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| > \epsilon} \frac{f(x+t)}{t} dt.$$

განსაზღვრება 1. *ვთქვათ, მოცემულია ფუნქცია $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$. ϕ თითქმის კლებადია $[a, b]$–ზე, თუ არსებობს დადებითი მუდმივი A ისეთი, რომ ყოველი $t_1 < t_2$-თვის $[a, b]$-დან $\phi(t_1) \geq A\phi(t_2)$.*

განსაზღვრება 2. *ფუნქციას $\omega : [0, 1] \to \mathbb{R}$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*
(1) $\omega(0) = 0$*;*
(2) ω *არაკლებადია;*
(3) ω *უწყვეტია;*
(4) $\frac{\omega(t)}{t}$ *თითმის კლებადია* $[0, 1]$*–ზე,*
ეწოდება უწყვეტობის მოდული.

განსაზღვრება 3. *ვიტყვით, რომ უწყვეტობის მოდული ω აკმაყოფილებს ზიგმუნდის პირობას, თუ*

$$\int_0^h \frac{\omega(t)}{t}dt + h\int_h^1 \frac{\omega(t)}{t^2}dt = O(\omega(h)),$$

როცა $h \to 0^+$.

განსაზღვრება 4. *ვთქვათ, $f \in L^p(\mathbb{R})$ და $\alpha \in (0,1]$ რაიმე რიცხვია. ვიტყვით, რომ f ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას, თუ*

$$|f(x+h) - f(x)| < Kh^{\alpha}$$

ყოველი x–ისათვის თანაბრად, როცა $h \to 0$ $(0 < h \leq 1)$.

განსაზღვრება 5. *ვთქვათ, ω უწყვეტობის მოდულია. ვიტყვით, რომ $f \in L^p(\mathbb{R})$ ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის განზოგადებულ პირობას, თუ*

$$|f(x+h) - f(x)| < K\omega(h)$$

სრულდება თანაბრად ყოველი x–ისათვის, როცა $h \to 0$ $(0 < h \leq 1)$, სადაც K აბსოლუტური მუდმივია.

2. ზოგიერთი ცნობილი ფაქტი ჰილბერტის გარდაქმნის შესახებ

ვთქვათ, გვაქვს $2\pi\lambda$ პერიოდის მქონე $f(x)$ ფუნქცია, რომელიც წარმოდგება ფურიეს მწკვრივად

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n cos(\frac{nx}{\lambda}) + b_n sin(\frac{nx}{\lambda})\right\}. \tag{1}$$

კოეფიციენტები a_m და b_m ფორმალურად მიღებულია $f(x)$ ფუნქციის შესაბამისად $cos(\frac{mx}{\lambda})$ და $sin(\frac{mx}{\lambda})$–ზე გამრავლებით და $(-\pi\lambda, \pi\lambda)$ ინტერვალზე ინტეგრებით. შესაბამისად, გვექნება

$$a_m = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)cos(\frac{mt}{\lambda})dt \tag{2}$$

და
$$b_m = \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)sin(\frac{mt}{\lambda})dt. \tag{3}$$
ამის გათვალისწინებით (1) ფორმულა შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგნაირად
$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)cos(\frac{n(x-t)}{\lambda}). \tag{4}$$
აღვნიშნოთ $n/\lambda = u$, $1/\lambda = \delta u$, და λ მივასწრაფოთ უსასრულობისკენ $(\lambda \to \infty)$, მაშინ (4) ფორმულაში ჯამი გარდაიქმნება ინტეგრალად და შესაბამისად, გვექნება
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)cos[u(x-t)]dt. \tag{5}$$
ეს უკანასკნელი კი არის ფურიეს ინტეგრალური ფორმულა.

ფურიეს ინტეგრალური ფორმულა შეიძლება ასევე ჩაიწეროს შემდეგი ფორმით
$$f(x) = \int_{0}^{\infty}\big(a(t)cos(xt) + b(t)sin(xt)\big)dt, \tag{6}$$
სადაც
$$a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)cos(ut)du \tag{7}$$
და
$$b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)sin(ut)du. \tag{8}$$

თუ $f(x)$ ლუწი ფუქციაა, მაშინ
$$a(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(u)cos(ut)du,$$
ხოლო $b(t)$ ქრება და (6) ფორმულა მიიღებს შემდეგ სახეს
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} cos(xu)du \int_{0}^{\infty} f(t)cos(ut)dt. \tag{9}$$
(9)-ს უწოდებენ ფურიეს კოსინუს ფორმულას. ანალოგიურად, თუ $f(x)$ კენტი ფუნქციაა $a(t)$ გაქრება და მივიღებთ ფურიეს სინუს ფორმულას
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} sin(xu)du \int_{0}^{\infty} f(t)sin(ut)dt. \tag{10}$$

ნებისმიერი $f(x)$ ფუნქციისთვის სამართლიანია წარმოდგენა

$$f(x) = \frac{1}{2}\{f(x) + f(-x)\} + \frac{1}{2}\{f(x) - f(-x)\} = g(x) + h(x),$$

საიდანაც ჩანს, რომ $g(x)$ ლუწი ფუნქციაა, ხოლო $h(x)$ კი კენტი. მაშინ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) cos[u(x-t)]dt$$

$$= 2cos(ux)\int_0^{\infty} g(t)cos(ut)dt + 2sin(ux)\int_0^{\infty} h(t)sin(ut)dt,$$

ამ ფორმულის და (9)–ის გათვალისწინებით გვექნება

$$g(x) + h(x)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} cos(ux)du \int_0^{\infty} g(t)cos(ut)dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} sin(ux)du \int_0^{\infty} h(t)sin(ut)dt,$$

რაც წარმოადგენს $g(x)$ შესაბამის კოსინუს ფორმულისა და $h(x)$–ის შესაბამისი სინუს ფორმულის ჯამს.

ფორმალურად, (6) ინტეგრალი არის

$$U(x,y) = \int_0^{\infty} (a(t)cos(xt) + b(t)sin(xt))e^{-yt}dt$$

გამოსახულების ზღვარი, როცა $y \to 0$. $U(x,y)$ თავის მხრივ არის $\Phi(z)$ კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის ნამდვილი ნაწილი, სადაც

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} (a(t) – ib(t))e^{-zt}dt, (z = x + iy)$$

ხოლო $\Phi(z)$-ის წარმოსახვითი ნაწილი არის

$$V(x,y) = -\int_0^{\infty} (b(t)cos(xt) – a(t)sin(xt))e^{-yt}dt.$$

$y = 0$-თვის $-V(x,0)$ აღვნიშნოთ $g(x)$–ით ($g(x) = -V(x,0)$). ცხადია, რომ

$$g(x) = \int_0^{\infty} (b(t)cos(xt) – a(t)sin(xt))dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} sin[(u-x)t]f(u)du.$$

ფორმალურად, $g(x)$ მიიღება (6) ფორმულიდან $a(t)$–ს $b(t)$–თი და $b(t)$–ს $-a(t)$–თი ჩანაცვლებით.

თუ გავიხსენებთ $f(x)$ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნის ფორმულას

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt,$$

მაშინ $a(t)$ და $b(t)$-თვის ადგილი ექნება შემდეგ წარმოდგენას

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \{F(t) + F(-t)\}$$

და

$$b(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \{F(t) - F(-t)\}.$$

ამრიგად, მივიღებთ

$$g(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \{F(t) - F(-t)\} cos(xt) dt - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \{F(t) + F(-t)\} sin(xt) dt$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \Big\{ \int_0^{\infty} F(t) e^{-itx} dt - \int_0^{\infty} F(-t) e^{itx} dt \Big\}$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} F(t) sgn(t) e^{-itx} dt.$$

$G(t)$-თი აღვნიშნოთ $-iF(t)sgn(t)$, $G(t) = -iF(t)sgn(t)$.

თუ $f(x)$ არის ლუწი ფუნქცია, მაშინ $b(t) = 0$ და $g(x)$ იქნება $f(x)$-ის კოსინუს გარდაქმნის სინუს გარდაქმნა; ანალოგიურად, თუ $f(x)$ არის კენტი ფუნქცია, მაშინ $g(x)$ იქნება $f(x)$-ის სინუს გარდაქმნის კოსინუს გარდაქმნა.

ფორმალურად, გვაქვს

$$g(x) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} dt \int_{-\infty}^{\infty} sin[(u - x)t] f(u) du$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - cos[\lambda(u - x)]}{u - x} f(u) du$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - cos[\lambda t]}{t} \{f(x + t) - f(x - t)\} dt.$$

თუ $f(x)$ საკმარისად რეგულარული ფუნქციაა, მაშინ $cos(\lambda t)$-ს შემცველი წევრი მიისწრაფვის 0–კენ, როცა $\lambda \to \infty$ და გვექნება

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x + t) - f(x - t)}{t} dt. \tag{11}$$

ანალოგიურად,

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}dt. \tag{12}$$

რადგანაც (11) ფორმულის მარჯვენა მხარე f–ზეა დამოკიდებული, ამიერიდან მას აღვნიშნავთ $H_f(x)$–ით. შესაბამისად, (11) და (12) ფორმულები შემდეგნაირად გადაიწერება

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt$$

და

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_f(x+t)-H_f(x-t)}{t}dt.$$

(11) და (12) სახით მოცემული დამოკიდებულებები პირველად შენიშნა ჰილბერტმა, ამიტომ ამ გამოსახულებებს უწოდებენ ჰილბერტის გარდაქმნას და მის შებრუნებულ გარდაქმნას (ან საპასუხო ფორმულას).

(11) და (12) ფორმულების ექვივალენტური ფორმულებია

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{t-x}dt \tag{13}$$

და

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{H_f(t)}{t-x}dt, \tag{14}$$

სადაც ინტეგრალები გაიგება კოშის აზრით

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|t-x|>\epsilon} \frac{f(t)}{t-x}dt.$$

მოვიყვანოთ ფუნქციისა და მისი შესაბამისი ჰილბერტის გარდაქმნის რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითი 1. *ვთქვათ,*

$$f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < a \\ 0, \textit{სხვაგან} \end{cases}$$

მაშინ მოცემული ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნა იქნება

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{t-x}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{1}{t-x}dt = \frac{1}{\pi}log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|.$$

მაგალითი 2.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

მაშინ

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+t^2)(t-x)}dt = -\frac{x}{1+x^2}.$$

მაგალითი 3. $f(x) = cos(x)$,
მაშინ

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos(t)}{t-x}dt = -sin(x).$$

ახლა მოვიყვანოთ $f(x)$ ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნასთან დაკავშირებული რამდენიმე მნიშვნელოვანი თეორემა.

თეორემა 1. *ვთქვათ, f ფუნქცია ეკუთვნის $L^2(-\infty,+\infty)$, მაშინ*

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)log\Big|1-\frac{x}{t}\Big|dt \tag{15}$$

არსებობს თითქმის ყველგან, რომელიც ასევე $L^2(-\infty,+\infty)$ კლასშია. ამავდროულად, მართებულია

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)log\Big|1-\frac{x}{t}\Big|dt, \tag{16}$$

და ამასთან, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}g^2(x)dx. \tag{17}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $F(x)$ არის $f(x)$ ფუნციის ფურიეს გარდაქმნა და $g(x)$ არის $G(x) = -iF(x)sgn(x)$ ფუნქციის გარდაქმნა, მაშინ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|G(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2dx = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx,$$

ასევე,

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}G(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\frac{e^{-ixy}-1}{|y|}dy.$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$T(y) = \frac{e^{-ixy}-1}{|y|}.$$

ამ ფუნქციის ფურიეს გარდაქმნა არის

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ixy}-1}{|y|}e^{-iuy}dy=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{cos[(x+u)y]-cos(uy)}{y}dy$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\delta}^{\infty}\frac{cos[(x+u)y]-cos(uy)}{y}dy$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\int_{\delta|x+u|}^{\infty}\frac{cos(v)}{v}dv-\int_{\delta|u|}^{\infty}\frac{cos(v)}{v}dv)$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\delta|x+u|}^{\delta|u|}\frac{cos(v)}{v}dv$$

$$=\lim_{\delta\to 0}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\delta|x+u|}^{\delta|u|}\frac{1}{v}dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}log\Big|\frac{u}{x+u}\Big|.$$

აქედან პარსევალის ფორმულა გვაძლევს

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)log\Big|\frac{u}{x-u}\Big|du,$$

საიდანაც გამოდის (15)–ის სამართლიანობა. რადგან F და G–ს შორის დამოკიდებულება, აქედან გამომდინარე f და g–ს შორის დამოკიდებულება არის ცნობილი, ამიტომ სამართლიანია (16)–ც. □

$a(t)$ და $b(t)$–ს განმსაზღვრელი ინტეგრალები არსებობს საშუალო კვდრატული აზრით და

$$a(t)-ib(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}F(-t).$$

ვთქვათ, $W(t)=e^{izt}$ $(t>0)$, 0, $(t<0)$, მაშინ

$$w(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{izt-izu}du=\frac{1}{i\sqrt{2\pi(u-z)}}.$$

თუ შემდეგი ფორმით მოცემულ პარსევალის ფორმულას

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(-t)W(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)w(t)dt,$$

გამოვიყენებთ

$$\Phi(z)=\int_{0}^{\infty}(a(t)–ib(t))e^{-zt}dt$$

ფორმულაზე, მაშინ მივიღებთ

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

$(I(z) > 0)$. ავიღოთ ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები დამოუკიდებლად, შედეგად, გვექნება

$$U(x,y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-x}{(t-x)^2+y^2} H_f(t) dt \tag{18}$$

და

$$V(x,y) = -\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t-x)^2+y^2} H_f(t) dt. \tag{19}$$

კოშის სინგულარულ ინტეგრალთა თეორიის გამოყენებით მივიღებთ $U(x,y) \to f(x)$, როცა $y \to 0$ x–ის თითქმის ყველა მნიშვნელობისთვის და $V(x,y) \to -H_f(x)$, როცა $y \to 0$, ასევე, x–ის თითქმის ყველა მნიშვნელობისთვის. აქ ჩვენ ვიყენებთ ქვემოთ მოყვანილ ლემას.

ლემა. *ვთქვათ, $f(x)$ არის ნებისმიერი ფუნქცია ისეთი, რომ $f(x)$ ეკუთვნის $L(0,1)$ და $\frac{f(x)}{x}$ ეკუთვნის $L(1,\infty)$. $V(x,y)$ იყოს განსაზღვრული (15) ფორმულით, მაშინ*

$$\lim_{y\to 0} \left\{ V(x,y) + \frac{1}{\pi} \int_{y}^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t} dt \right\} = 0, \tag{20}$$

x–ის თითქმის ყველა მნიშვნელობისთვის.

დამტკიცება. როგორც ვიცით,

$$\omega(y) = \int_0^y |f(x+t)-f(x-t)| dt = o(y)$$

x-ის თითქმის ყველა მნიშვნელობისთვის. ვთქვათ, x ის წერტილია, სადაც ეს უკანასკნელი სამართლიანია. მაშინ გვაქვს

$$V(x,y) + \frac{1}{\pi} \int_y^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t} dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{t}{t^2+y^2} \{f(x+t)-f(x-t)\} dt +$$

$$+\frac{y^2}{\pi} \int_y^1 \frac{f(x+t)-f(x-t)}{(t^2+y^2)t} dt + \frac{y^2}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{(t^2+y^2)t} dt$$

$$= J_1 + J_2 + J_3.$$

როცა y მიისწრფვის 0–სკენ ($y \to 0$)

$$|J_1| \le \frac{1}{2\pi y}\int_0^y |f(x+t) - f(x-t)|dt = o(1).$$

$$J_2 \le \frac{y^2}{\pi}\int_y^1 \frac{|f(x+t) - f(x-t)|}{(t^2+y^2)t}dt$$

$$= \frac{y^2}{\pi}\big[\frac{\omega(t)}{(t^2+y^2)t}\big]_y^1 + \frac{y^2}{\pi}\int_y^1 \frac{3t^2+y^2}{(t^2+y^2)^2t^2}\omega(t)dt$$

$$\le \frac{y^2}{\pi}\frac{\omega(1)}{1+y^2} + o\big\{y^2\int_y^1 \frac{3t^2+y^2}{(t^2+y^2)^2t}dt\big\}$$

$$= O(y^2) + o\big\{\int_1^{\frac{1}{y}} \frac{3u^2+1}{(u^2+1)^2u}du\big\} = o(1).$$

მსგავსი გარდამნებით მივიღებთ $J_3 = o(1)$. ამრიგად, ნაჩვენებია თეორემის სამართლიანობა. □

ვინაიდან $V(x,y) \to -H_f(x)$ თითქმის ყველგან, როცა $y \to 0$, ამიტომ

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}dt$$

ფორმულის მართებულობა გამომდინარეობს (20)–დან. მსგავსად მტკიცდება, რომ

$$U(x,y) \to -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_f(x+t) - H_f(x-t)}{t}dt,$$

როცა $y \to 0$ და ვინაიდან $U(x,y) \to f(x)$ როცა $y \to 0$, მივიღებთ

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_f(x+t) - H_f(x-t)}{t}dt.$$

თეორემა 2. *ვთქვათ, $f(x)$ ეკუთვნის $L^2(-\infty,+\infty)$, მაშინ ჰილბერტის გარდაქმნა*

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}dt$$

არსებობს თითქმის ყველგან, ეკუთვნის $L^2(-\infty,+\infty)$ და მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_f(x+t) - H_f(x-t)}{t}dt.$$

ამასთან, სრულდება ტოლობა

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H_f^2(x)dx.$$

შენიშვნა. *ეს თეორემა ამბობს, რომ ჰილბერტის გარდაქმნა* $L^2(-\infty,+\infty)$ *კლასის ფუნქციებს ტოვებს* $L^2(-\infty,+\infty)$ *კლასში და ამავდროულად,* $f(x)$ *განისაზღვრება ჰილბერტის გარდაქმნის გამოყენებით თითქმის ყველგან.*

თეორემა (2)–ის განზოგადებულ ვარიანტს წარმოადგენს შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. (რისის თეორემა). *ვთქვათ,* $f(x)$ *ეკუთვნის* $L^p(-\infty,+\infty)$ *, სადაც* $p>1$*, მაშინ ჰილბერტის გარდაქმნა*

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt \tag{21}$$

არსებობს თითქმის ყველგან და $L^p(-\infty,+\infty)$ *კლასშია. ამასთან, ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას*

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{H_f(x+t)-H_f(x-t)}{t}dt. \tag{22}$$

ასევე, სრულდება უტოლობა

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H_f(x)|^p dx \le M_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx, \tag{23}$$

სადაც M_p *დამოკიდებულია მხოლოდ* p*–ზე.*

დამტკიცება. განვიხილოთ სამი შემთხვევა.

1) ვთქვათ, p ლუწი მთელი რიცხვია და

$$\Phi_\alpha(z) = \frac{1}{i\pi}\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{t-z}dt = U_\alpha(x,y) + iV_\alpha(x,y), (y>0).$$

განვიხილოთ წირითი ინტეგრალი

$$\int_L \{\Phi_\alpha(z)\}^p dz,$$

სადაც L წირი არის გაერთიანება $-R+iy$ და $R+iy$ ბოლოების მქონე მონაკვეთისა და $(-R+iy, R+iy)$ დიამეტრის მქონე იმ ნახევარწრეწირისა, რომელიც ამ მონაკვეთის ზემოთ მდებარეობს.

ფიქსირებული α-სთვის $\Phi_\alpha(z) = O(\frac{1}{z})$, როცა $z \to \infty$. მივასწრაფოთ R უსასრულობისკენ ($R \to \infty$), მაშინ მივიღებთ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{\Phi_\alpha(x+iy)\}^p dx = 0,$$

შესაბამისად, გვაქვს

$$\int_{-\infty}^{\infty} (U_\alpha + iV_\alpha)^p dx = 0.$$

გავშალოთ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ბინომიალური თეორემით და ავიღოთ ნამდვილი ნაწილი, მაშინ გვექნება

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{V_\alpha^p - \binom{p}{2} V_\alpha^{p-2} U_\alpha^2 + \binom{p}{4} V_\alpha^{p-4} U_\alpha^4 - ... \pm U_\alpha^p\} dx = 0.$$

აქედან

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_\alpha^p dx \leq \binom{p}{2} \int_{-\infty}^{\infty} V_\alpha^{p-2} U_\alpha^4 dx + ... + \int_{-\infty}^{\infty} U_\alpha^p dx.$$

ახლა, ვინაიდან

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_\alpha^{p-2k} U_\alpha^{2k} dx \leq \big(\int_{-\infty}^{\infty} V_\alpha^p dx\big)^{(p-2k)/p} \big(\int_{-\infty}^{\infty} U_\alpha^p dx\big)^{2k/p}.$$

თუ დავწერთ

$$X^p = \big(\int_{-\infty}^{\infty} V_\alpha^p dx\big) / \big(\int_{-\infty}^{\infty} U_\alpha^p dx\big),$$

მაშინ მივიღებთ

$$X^p \leq \binom{p}{2} X^{p-2} + \binom{p}{4} X^{p-4} + ... + 1.$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ X არ აღემატება შემდეგი განტოლების უდიდეს დადებით ფესვს

$$X^p - \binom{p}{2} X^{p-2} - \binom{p}{4} X^{p-4} - ... - 1 = 0.$$

ასე, რომ სრულდება $X \leq M_p$, სადაც M_p დამოკიდებულია მხოლოდ p–ზე; ამის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_\alpha^p dx \leq M_p^p \int_{-\infty}^{\infty} U_\alpha^p dx.$$

ახლა კი რადგან

$$|U_a(x,y)| = \frac{y}{\pi}|\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}dt| \leq \frac{y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{|f(t)|}{(t-x)^2+y^2}dt,$$

$$|U_a(x,y)|^p \leq \frac{y^p}{\pi^p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^p}{(t-x)^2+y^2}dt\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2}\}^{p-1}$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^p}{(t-x)^2+y^2}dt$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^p dx \leq \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(t-x)^2+y^2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p dt. \tag{24}$$

აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\int_{-\infty}^{\infty}\{V_a(x,y)\}^p dx \leq M_p^p\int_{-\infty}^{\infty}\{f(t)\}^p dt.$$

ამ უკანასკნელში a მივასწრაფოთ 0–სკენ ($a \to 0$), შედეგად მივიღებთ

$$V_a(x,y) \to V(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}f(t)dt, \tag{25}$$

(25) ფორმულაში y მივასწრაფოთ 0–სკენ, უკვე დამტკიცებული თეორემის თანახმად გვაქვს, რომ $V(x,y) \to -g(x)$. (25) ფორმულისა და ფატუს თეორემის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^p dx \leq M_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx$$

შეფასების მართებულობას.

2) ვთქვათ, p არ არის მთელი. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $f(t) \geq 0$. მაშინ $U(x,y) > 0$ და $U_a(x,y) > 0$, როცა $y > 0, a > a_0$.

კომპლექსური რიცხვის p ხარისხის განსაზღვრების თანახმად

$$(U+iV)^p = e^{\frac{1}{2}plog(U^2+V^2)+iparctan(V/U)},$$

სადაც $-\frac{1}{2}\pi < arctan(V/U) < \frac{1}{2}\pi$, $U > 0$-თვის. თუ $U \to 0$, მაშინ მივიღებთ

$$(iV)^p = |V|^p e^{\frac{1}{2}ip\pi}, (V < 0).$$

ამ განსაზღვრებების თანახმად გვაქვს

$$|(U+iV)^p – (iV)^p| = p\int_{iV}^{U+iV} z^{p-1}dz$$

$$\leq pU(U^2+V^2)^{\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}} \leq p2^{\frac{1}{2}(p-1)}(U^p+U|V|^{p-1}).$$

თუ ამას გამოვიყენებთ U_a და V_a–თვის, შესაბამისად, ადგილი ექნება შემდეგ უტოლობას

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\big\{(U_a+iV_a)^p – (iV_a)^p\big\}dx\Big| \leq K_p\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}U_a^p dx + \int_{-\infty}^{\infty}U_a|V_a|^{p-1}dx\Big\}. \tag{26}$$

მაგრამ, როგორც უკვე აღვნიშნეთ

$$\int_{-\infty}^{\infty}(U_a+iV_a)^p dx = 0,$$

ამიტომ, გვექნება

$$\int_{-\infty}^{\infty}(iV_a)^p dx \geq \Big|R\int_{-\infty}^{\infty}(iV_a)^p dx\Big| = |cos(\frac{1}{2}p\pi)|\int_{-\infty}^{\infty}|iV_a|^p dx.$$

საიდანაც (26)–ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$|cos(\frac{1}{2}p\pi)|\int_{-\infty}^{\infty}|iV_a|^p dx \leq K_p\int_{-\infty}^{\infty}U_a^p dx + K_p\int_{-\infty}^{\infty}U_a|V_a|^{p-1}dx,$$

აქედან, (21) და (23) ფორმულების მართებულობა მტკიცდება წინა შემთხვევის ანალოგიურად.

ზემოთ განხილული მტკიცების გზა არ გამოგვადგება, როცა p კენტი მთელი რიცხვია. ამ მომენტისათვის ეს შემთხვევა ღიად დავტოვოთ. ახლა ვაჩვენოთ, რომ თუ p არ არის მთელი მართებულია (22) ფორმულაც.

როგორც ვიცით,

$$|U(x,y)-f(x)|^p \leq \frac{y^p}{\pi^p}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t+x)-f(x)}{t^2+y^2}dt\Big|^p$$

$$< \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t+x)-f(x)|^p}{t^2+y^2}dt,$$

აქედან, გვაქვს

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U(x,y)-f(x)|^p dx < \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+y^2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+x)-f(x)|^p dx.$$

შიდა ინტეგრალი შემოსაზღვრულია ყოველი t–თვის, და მიისწრაფვის 0–კენ t–თან ერთად. აქედან გამომდინარე უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარე ნაკლებია შემდეგ გამოსახულებაზე

$$K_p y \int_\delta^\infty \frac{dt}{t^2+y^2} + \epsilon(\delta) y \int_0^\delta \frac{dt}{t^2+y^2} < K_p y \int_\delta^\infty \frac{dt}{t^2} + \epsilon(\delta) y \int_0^\infty \frac{dt}{t^2+y^2}$$

$$< K_p \frac{y}{\delta} + \frac{1}{2}\pi\epsilon(\delta),$$

რომელიც მიისწრაფვის 0–კენ შესაბამისი δ და y–ის შერჩევით. აქედან გამომდინარე გვაქვს, რომ

$$\lim_{y\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |U(x,y) - f(x)|^p dx = 0.$$

ასევე (24)–ის გათვალისწინებით გვექნება

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x,y) - U_a(x,y)|^p dx \le \Big(\int_{-\infty}^{-a} + \int_a^\infty \Big) |f(t)|^p dt \to 0,$$

როცა $a \to \infty$, თანაბრად y–ის მიმართ. აქედან გამომდინარე

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,y) - f(x)|^p dx \to 0, \tag{27}$$

როცა $a \to \infty$, $y \to 0$ ნებისმიერი სახით.

ნაშთთა თეორიის ერთ–ერთ შედეგს წარმოადგენს შემდეგი ფორმულა,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{y=\eta} \frac{\Phi_a(z)}{z - \xi - i\eta} dz = \Phi_a(\xi + i\eta), (\eta > 0)$$

ავიღოთ ამ უკანასკნელის წარმოსახვითი ნაწილი. შესაბამისად, გვექნება

$$\frac{1}{\pi i} \int_\infty^\infty \frac{U_a(x,\eta)}{x-\xi} dx = -V_a(\xi,\eta).$$

საიდანაც ჩანს, რომ $U_a(x,y)$–ის ჰილბერტის გარდაქმნა არის $-V_a(x,y)$, და (23) უტოლობით გვექნება

$$\int_\infty^\infty |V_a(x,y) + g(x)|^p dx < K_p \int_\infty^\infty |U_a(x,y) - f(x)|^p dx. \tag{28}$$

(27) და (28) შედეგების გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\int_\infty^\infty |\Phi_a(z) - \{f(x) - ig(x)\}|^p dx \to 0,$$

როცა $y \to 0$ და $a \to \infty$ ნებისმიერად.

კვლავ ნაშთთა თეორიის გამოყენებით გვაქვს

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_a(z)}{z-\xi-i\eta}dz = \Phi_a(\xi+i\eta), (y<\eta).$$

ამ უკანასკნელში, თუ $a \to \infty$ და $y \to 0$, მაშინ მივიღებთ

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-ig(x)}{x-\xi-i\eta}dx = \Phi(\xi+i\eta),$$

აქედან

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-ig(x)}{x-\xi-i\eta}dx = \frac{1}{2}\Phi(\xi+i\eta).$$

ავიღოთ ამ უკანასკნელის ნამდვილი ნაწილი. მაშასადამე, გვაქვს

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x–\xi}{(x-\xi)^2-(\eta)^2}g(x)dx = -U(\xi,\eta).$$

მივასწრაფოთ $\eta \to 0$–კენ, მაშინ ტოლობის მარცხენა მხარე თითქმის ყველგან მიისწრაფვის $g(x)$ ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნისკენ თეორემა (2)–ის თანახმად. მარჯვენა მხარე კი თითქმის ყველგან მიისწრაფვის $-f(x)$–კენ (კოშის სინგულარული ინტეგრალი). რაც ამტკიცებს (22)–ს.

3) იმისთვის, რომ დავამტკიცოთ თეორემის მართებულობა, როცა p კენტი მთელი რიცხვია, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ თუ თეორემა მართებულია p–თვის, მაშინ ის მართებულია $2p$–თვის. ამით გავიმარტივებთ სიტუაციას, რადგანაც კენტი მთელი p რიცხვის ნახევარი $p/2$ არ არის მთელი, რომელ შემთხვევაშიც ნაჩვენები გვაქვს თეორემის მართებულობა. მაშასადამე, თუ ზემოთხსენებულ დებულებას დავამტკიცებთ, ვინაიდან $p/2$–თვის თეორემა მართებულია, ის მართებული იქნება p–თვისაც.

ნაშთთა თეორიაზე დაყრდნობით, $\{\Phi_a(z)\}^2$–თვის მივიღებთ

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{\{\Phi_a(x+iy)\}^2}{x-\xi}dx = \{\Phi_a(\xi+iy)\}^2, (y>0)$$

საიდანაც გვექნება

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{U_a^2-V_a^2+2iU_aV_a}{x-\xi}dx = U_a^2(\xi,y)-V_a^2(\xi,y)+2iU_a(\xi,y)V_a(\xi,y).$$

ავიღოთ ტოლობის ორივე მხარის წარმოსახვითი ნაწილები. შედეგად მივიღებთ, რომ $U_a^2(\xi,y)-V_a^2(\xi,y)$ არის $-2U_a(\xi,y)V_a(\xi,y)$ ფუნქციის ჰილბერტის გარდაქმნა. ვთქვათ, $\psi(x)$ არის U_a^2–ის ჰილბერტის გარდაქმნა და $\chi(x)$

კი V_a^2–ის ჰილბერტის გარდაქმნა, მაშინ

$$\psi(x) - \chi(x) = -2U_a V_a.$$

აქედან გამომდინარე

$$|\chi(x)|^p \leq 2^p |\psi(x)|^p + 2^{2p} |U_a V_a|^p,$$

საიდანაც გვაქვს, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x)|^p dx \leq 2^p \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^p dx + 2^{2p} \int_{-\infty}^{\infty} |U_a V_a|^p dx.$$

თავის მხრივ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_a V_a|^p dx \leq \big(\int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^{2p} dx \int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^{2p} dx \big)^{\frac{1}{2}},$$

ფუნდამენტალური უტოლობით (23) გვაქვს

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^p dx < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^{2p} dx,$$

და ასევე

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^{2p} dx < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x)|^p dx.$$

ზემოთ მიღებული შესაბამისი უტოლობების გათვალისწინებით გვექნება,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^{2p} dx < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^{2p} dx + K_p \big(\int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^{2p} dx \int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^{2p} dx \big)^{\frac{1}{2}}.$$

შედეგი $2p$–თვის გამოდის წინა შემთხვევების მსგავსად, რაც ასრულებს დამტკიცებას. □

ცხადია ისმის კითხვა, რა ხდება იმ შემთხვევაში, როცა $p = 1$?

ამ შემთვევაში თეორემა (3) არ არის სამართლიანი, რადგან ჰილბერტის გარდაქმნას $L(-\infty, +\infty)$ კლასის ფუნქციები ზოგადად არ გადაჰყავს $L(-\infty, +\infty)$ კლასში.

ამის საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ შემდეგი მაგალითი.

$$f(t) = \frac{1}{tlog^2(t)} (t > 0), 0, (t \leq 0),$$

მაშინ, $x > 0$-თვის

$$H_f(-x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t + x} dt > \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{1}{2xtlog^2(t)} dt = \frac{1}{2\pi x log(x)}$$

ცხადია, $H_f(x)$ არ ეკუთვნის $L(-\infty,+\infty)$, ვინაიდან ინტეგრალი $H_f(x)$-დან არა მხოლოდ $(-\infty,+\infty)$–ზე, არამედ 0–ის შემცველ ნებისმიერ კომპაქტზე შემოუსაზღვრელია.

თუმცა, $p=1$ შემთხვევაში ადგილი აქვს შემდეგ თეორემას.

თეორემა 4. *თუ $f(x)$ ეკუთვნის $L(-\infty,+\infty)$, მაშინ*

$$H_f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt$$

არსებობს x–ის თითქმის ყველა მნიშვნელობისთვის, და ინტეგრალი

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{|H_f(x)|^p}{1+x^2}dx$$

კრებადია, თუ $0<p<1$.

თეორემა 5. (ტიტჩმარშის თეორემა). *ვთქვათ, $f(x)$ ეკუთვნის $L^p(-\infty,\infty)$ და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას*

$$|f(x+h)-f(x)|<Kh^\alpha(0<\alpha<1) \tag{29}$$

თანაბრად ყოველი x–ისათვის, როცა $h\to 0(0<h\le 1)$, მაშინ ჰილბერტის გარდაქმნა

$$H_f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}dt$$

და მისი შებრუნებული გარდაქმნა

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{H_f(x+t)-H_f(x-t)}{t}dt$$

არსებობს ყველა x–თვის. ამასთან, $H_f(x)$ ეკუთვნის $L^p(-\infty,\infty)$ და აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას $f(x)$–ის შესაბამისი α–სთვის, ანუ

$$|H_f(x+h)-H_f(x)|<Kh^\alpha,(0<\alpha<1)$$

თანაბრად ყოველი x–ისათვის, როცა $h\to 0$.

დამტკიცება. (21) ინტეგრალი ცხადია არსებობს x–ის ყველა მნიშვნელობისათვის. ვინაიდან $f(x)$ უწყვეტია, იმ წერტილთა სიმრავლე, სადაც $|f(x)|\ge\delta>0$ წარმოქმნის ინტერვალთა სიმრავლეს. ასეთი (x_1,x_2) ინტერვალების სიგრძე მიისწრაფვის 0–სკენ, როცა $x_1\to 0$, რადგან

$$(x_2-x_1)\delta^p\le\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|^p dx\to 0.$$

ახლა, ვინაიდან $|f(x_1)| = \delta$,

$$|f(x)| \le |f(x_1)| + |f(x) - f(x_1)| \le \delta + K|x - x_1|^\alpha \le \delta + K|x_2 - x_1|^\alpha,$$

რომელიც მიისწრაფვის 0–სკენ, ჯერ δ–ს არჩევით და შემდეგ x_1–ის არჩევით. აქედან კი მივიღებთ $f(x) \to 0$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ (29) სრულდება მცირე h–ებისთვის, მაშინ ის სრულდება ნებისმიერი h–ისთვის შესაბამისი K მუდმივის შერჩევით.

როცა $y \to 0$,

$$V(x,y) + H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \big(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+y^2}\big)\big\{f(x+t) - f(x-t)\big\}dt$$

$$= \frac{y^2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t(t^2+y^2)}dt = O\big(y^2\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{t^2+y^2}dt\big) = O(y^\alpha),$$

ასევე,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{(t-x)^2 - y^2}{\{(t-x)^2+y^2\}^2}f(t)dt$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^2}f(t+x)dt = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^2}\big\{f(t+x) - f(x)\big\}dt$$

$$= O\big(\int_{-\infty}^\infty \frac{|t^2-y^2|}{(t^2+y^2)^2}|t|^\alpha dt\big) = O(y^{\alpha-1}).$$

აქედან გამომდინარე, თუ ავიღებთ $h > 0$,

$$|H_f(x+h) - H_f(x)|$$

$$\le |H_f(x+h) + V(x+h,h)| + |V(x+h,h) - V(x,h)| + |H_f(x) - V(x,h)|$$

$$= O(h^\alpha) + O\big(\big|\int_x^{x+h} \frac{\partial V(\xi,h)}{\partial \xi}\big|\big) + O(h^\alpha) = O(h^\alpha),$$

მაშასადამე, $H_f(x)$ აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. □

ვიცოდით რა, (22) სრულდებოდა თითქმის ყველა x–ისათვის, ახლა ის სრულდება ყველა x–ისთვის, ვინაიდან ტოლობის ორივე მხარე უწყვეტია.

თუ $\alpha = 1$, ანალოგიურად მივიღებთ

$$\frac{\partial V}{\partial x} = O\big(\int_{-1}^1 \frac{|t^2-y^2|}{(t^2+y^2)^2}|t|dt\big) + O\big(\int_1^\infty \frac{dt}{t^2}\big)$$

$$= O\big(\frac{1}{y}\int_{\frac{-1}{y}}^{\frac{1}{y}} \frac{|u^2-1|}{(u^2+1)^2}|u|du\big) + O(1) = O\big(\frac{1}{y}log(\frac{1}{y})\big),$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$g(x+h) - g(x) = O\big(|h|log(\frac{1}{h})\big).$$

3. ძირითადი შედეგი

თეორემა. *ვთქვათ, ω უწყვეტობის მოდულია და*

$$\int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}dt < \infty.$$

თუ f ფუნქცია ეკუთვნის $L^p(-\infty,\infty)$ და აკმაყოფილებს ლიფშიცის განზოგადებულ პირობას

$$|f(x+h) - f(x)| < K\omega(h)(K = const)$$

თანაბრად ყოველი x–თვის, როცა $h \to 0$, მაშინ ჰილბერტის გარდაქმნა $H_f(x)$ არსებობს ყველა x–თვის, ეკუთვნის $L^p(-\infty,\infty)$ და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$|H_f(x+h) - H_f(x)| \le A\big(\int_0^h \frac{\omega(t)}{t}dt + h\int_h^1 \frac{\omega(t)}{t^2}dt\big),$$

სადაც A აბსოლუტური მუდმივაა.

დამტკიცება. როგორც ვიცით, ჰილბერტის გარდაქმნას აქვს შემდეგი სახე

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+x)}{t}dt.$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ კენტი ფუნქციიდან ინტეგრალი სიმეტრიულ საზღვრებში არის ნულის ტოლი, მაშინ ჰილბერტის გარდაქმნა მიიღებს შემდეგ ექვივალენტურ სახეს

$$H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}dt.$$

შესაბამისად, ჰილბერტის გარდაქმნას $x+h$ წერტილში ექნება შემდეგი სახე

$$H_f(x+h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+h+t) - f(x+h)}{t} dt.$$

ახლა, ცვლადის გარდაქმნით, თუ $t+h$ აღვნიშნავთ ახალი t–თი, მაშინ ძველი t ტოლია ახალ t–ს მინუს h და მივიღებთ

$$H_f(x+h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x+h)}{t-h} dt.$$

განვიხილოთ სხვაობა $H_f(x+h) - H_f(x)$ და მისი შემადგენელი წევრები შევაფასოთ ზემოდან.

$$H_f(x+h) - H_f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x+h)}{t-h} dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-2h} + \int_{2h}^{\infty}\Big)\big[f(x+t) - f(x+h)\big]\frac{1}{(t-h)} dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}\big[f(x+t) - f(x+h)\big]\frac{1}{t-h} dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-2h} + \int_{2h}^{\infty}\Big)\big[f(x+t) - f(x)\big]\frac{1}{t} dt - \frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}\big[f(x+t) - f(x)\big]\frac{1}{t} dt$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში გვაქვს ექვსი შესაკრები. ტოლობის მარჯვენა მხარეს პირველ ორ შესაკრებში ინტეგრალქვეშა გამოსახულების მრიცხველს შეგვიძლია დავამატოთ და გამოვაკლოთ $f(x)$, შემდეგ გამოვიყენოთ ინტეგრალის წრფივობა და გავხლიჩოთ ეს ინტეგრალი ორ შესაკრებად. საბოლოოდ, მსგავსი წევრების ერთად დაჯგუფების შედეგად მივიღებთ

$$H_f(x+h) - H_f(x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-2h} + \int_{2h}^{\infty}\Big)\big[f(x+t) - f(x)\big]\Big[\frac{1}{t-h} - \frac{1}{t}\Big] dt$$

$$+\big[f(x) - f(x+h)\big]\frac{1}{\pi}\Big(\int_{-\infty}^{-2h} + \int_{2h}^{\infty}\Big)\frac{1}{t-h} dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}\big[f(x+t) - f(x+h)\big]\frac{1}{t-h} dt - \frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}\big[f(x+t) - f(x)\big]\frac{1}{t} dt.$$

პირველი ორი შესაკრების ჯამი აღვნიშნოთ $I_1(x,h)$-ით, მესამე და მეოთხე შესაკრებების ჯამი $I_2(x,h)$–ით, მეხუთე შესაკრები $I_3(x,h)$–ით, ხოლო ბოლო შესაკრები $I_4(x,h)$–ით. $I_1(x,h)$–ის მეორე შესაკრებისთვის გვაქვს

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{2h}^{\infty}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$=\Big|\frac{1}{\pi}\int_{2h}^{1+h}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{1+h}^{\infty}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$\leq\Big|\frac{1}{\pi}\int_{2h}^{1+h}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$+\Big|\frac{1}{\pi}\int_{1+h}^{\infty}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$\leq\int_{2h}^{1+h}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{h}{(t-h)t}dt+\int_{1+h}^{\infty}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{h}{(t-h)t}dt$$

თეორემის პირობის თანახმად, f ფუნქცია აკმაყოფილებს ლიფშიცის განზოგადებულ პირობას $\big(|f(x+t)-f(x)|\leq K\omega(t)\big)$, ამის და f-ის შემოსაზღვრულობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{2h}^{\infty}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|\leq Kh\int_{2h}^{1+h}\frac{\omega(t)}{(t-h)^2}dt$$

$$+hC\int_{1+h}^{\infty}\frac{1}{(t-h)^2}dt$$

უტოლობის მარცხენა მხარეს, ცვლადის გარდაქმნით $t-h$ აღვნიშნოთ ახალი t–თი, მაშინ ამ უკანასკნელისთვის შესაბამისად გვექნება

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{2h}^{\infty}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|\leq Kh\int_{h}^{1}\frac{\omega(t+h)}{t^2}dt+hC\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt$$

ახლა, გამოვიყენოთ უწყვეტობის მოდულის თვისება, რომ ის არაკლებადია $\big(t_1<t_2\implies\omega(t_1)\leq\omega(t_2)\big)$. ასევე, გამოვიყენოთ, რომ $\frac{\omega(t)}{t}$ თითქმის კლებადია. რაც ნიშნავს, არსებობს რაღაც მუდმივი $B>0$, ისეთი, რომ თუ $t_1<t_2\implies\frac{\omega(t_1)}{t_1}\geq B\frac{\omega(t_2)}{t_2}$. ამ თვისებების გათვალისწიებით და $\int_1^\infty\frac{1}{t^2}dt=1$ ინტეგრალის სასრულობის გამო გვაქვს

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{2h}^{\infty}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|\leq Kh\int_{h}^{1}\frac{\omega(2t)}{t^2}dt+hC\int_{1}^{\infty}\frac{1}{t^2}dt$$

$$= 2Kh\int_h^1 \frac{\omega(2t)}{2tt}dt + hC\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = 2Kh\int_h^1 \frac{\omega(2t)}{2t}\frac{1}{t}dt + hC\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$$

$$\le K'h\int_h^1 \frac{\omega(t)}{t}\frac{1}{t}dt + C'h \le K'h\int_h^1 \frac{\omega(t)}{t}\frac{1}{t}dt + C''\omega(h)$$

$$\le K'h\int_h^1 \frac{\omega(t)}{t}\frac{1}{t}dt + \overline{C}\int_0^h \frac{\omega(t)}{t}dt$$

$$\le K_1\big(h\int_h^1 \frac{\omega(t)}{t^2}dt + \int_0^h \frac{\omega(t)}{t}dt\big),$$

სადაც $K_1 = max(K', \overline{C})$.
აქ გამოვიყენეთ ორი ფაქტი: 1) $h \le L\omega(h)$, სადაც $L = const$ და 2) $\omega(h) \le A\int_0^h \frac{\omega(t)}{t}dt$. დავამტკიცოთ თითოეული. 1) მართლაც, $\frac{\omega(t)}{t}$–ს თითქმის კლებადობის გამო, როცა $h \in (0,1]$ გვაქვს $\frac{\omega(h)}{h} \ge B\frac{\omega(1)}{1} \implies h \le L\omega(h)$. 2) კვლავ $\frac{\omega(t)}{t}$–ს თითქმის კლებადობის გამო გვაქვს

$$\int_0^h \frac{\omega(t)}{t}dt \ge A_0\int_0^h \frac{\omega(h)}{h}dt = A_0\omega(h),$$

საიდანაც ვღებულობთ სასურველ შედეგს.

ახლა შევაფასოთ $I_1(x,h)$–ის პირველი შესაკრები.

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-2h}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$= \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{-2h}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$\le \Big|\int_{-\infty}^{-1}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big| + \Big|\int_{-1}^{-2h}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$\le h\int_{-\infty}^{-1}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{1}{|(t-h)t|}dt + h\int_{-1}^{-2h}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{1}{|(t-h)t|}dt$$

$$\le hC\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{t^2}dt + h\int_{-1}^{-2h}\frac{|f(x+t)-f(x)|}{t^2}dt$$

ამ უკანასკნელის მეორე შესაკრებში აღვნიშნოთ $-t$ t–თი, მაშინ გვექნება

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-2h}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$= M_1h + h\int_{2h}^{1}\frac{|f(x)-f(x-t)|}{t^2}dt \le M_1h + M_2h\int_{2h}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}dt$$

$$\le M_3\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt + M_2h\int_{2h}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}dt$$

$$= M_3\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt + M_2h\int_{h}^{1}\frac{\omega(t)}{t^2}dt - h\int_h^{2h}\frac{\omega(t)}{t^2}dt$$

ახლა შევაფასოთ – ნიშნის მქონე წევრი.

$$h\int_h^{2h}\frac{\omega(t)}{t^2}dt = h\int_h^{2h}\frac{\omega(t)}{t}\frac{1}{t}dt$$

$$\le h\int_h^{2h}\frac{\omega(h)}{h}\frac{1}{t}dt = \omega(h)\int_h^{2h}\frac{1}{t}dt$$

$$\le A'\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt,$$

ბოლო შეფასებაში გამოვიყენეთ ის ფაქტი, რომ

$$\omega(h) \le A\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

შესაბამისად, საბოლოოდ გვექნება

$$\Big|\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-2h}\big[f(x+t)-f(x)\big]\frac{h}{(t-h)t}dt\Big|$$

$$\le M_3\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt + M_2h\int_h^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt + A_1\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt$$

$$= \big(M_3 + A_1\big)\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt + M_2h\int_h^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt$$

$$\le M_4\Big(\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt + h\int_h^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt\Big),$$

სადაც $M_4 = max\big((m_3 + A_1), M_2\big)$.

შესაბამისად, გვაქვს

$$|I_1(x,h)| \le \big(K_1 + M_4\big)\Big(\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt + h\int_h^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt\Big).$$

ახლა შევაფასოთ $|I_3(x,h)|$ და $|I_4(x,h)|$.

$$|I_4(x,h)| = \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}[f(x+t)-f(x)]\frac{1}{t}dt\Big|$$

$$= \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{0}[f(x+t)-f(x)]\frac{1}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2h}[f(x+t)-f(x)]\frac{1}{t}dt\Big|$$
$$\le \Big|\int_{-2h}^{0}[f(x+t)-f(x)]\frac{1}{t}dt\Big| + \Big|\int_{0}^{2h}[f(x+t)-f(x)]\frac{1}{t}dt\Big|$$
$$\le \int_{-2h}^{0}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{1}{|t|}dt + \int_{0}^{2h}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{1}{t}dt.$$

ახლა შევაფასოთ ორივე შესაკრები ცალკ–ცალკე. დავიწყოთ მეორეთი.

$$\int_{0}^{2h}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{1}{t}dt \le K\int_{0}^{2h}\frac{\omega(t)}{t}dt = K\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt + K\int_{h}^{2h}\frac{\omega(t)}{t}dt$$

$$\le K\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt + K'\int_{h}^{2h}\frac{\omega(h)}{h}dt = K\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt + K'\omega(h)$$

ახლა კი

$$\omega(h) \le A\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt$$

შეფასების გათვალისწინებით უკანასკნელი ჯამისთვის გვაქვს

$$\int_{0}^{2h}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{1}{t}dt \le C_1\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

შევაფასოთ პირველი შესაკრებიც.

$$\int_{-2h}^{0}\big|f(x+t)-f(x)\big|\frac{1}{|t|}dt \le \int_{-2h}^{0}\frac{\omega(|t|)}{|t|}dt$$

$$= \int_{0}^{2h}\frac{\omega(t)}{t}dt = \int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt + \int_{h}^{2h}\frac{\omega(t)}{t}dt$$

$$\le C_1\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

ვინაიდან ინტგრალქვეშა ფუნქცია $\frac{\omega(|t|)}{|t|}$ ლუწია.

აქედან გამომდინარე

$$|I_4(x,h)| \le 2C_1\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

რაც შეეხება, $|I_3(x,h)|$–ის შეფასებას,

$$|I_3(x,h)| = \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{2h}[f(x+t)-f(x+h)]\frac{1}{t-h}dt\Big|$$

$$= \Big|\frac{1}{\pi}\int_{-2h}^{0}[f(x+t)-f(x+h)]\frac{1}{t-h}dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2h}[f(x+t)-f(x+h)]\frac{1}{t-h}dt\Big|$$

$$\leq \int_{-2h}^{0}\big|f(x+t)-f(x+h)\big|\frac{1}{|t-h|}dt + \int_{0}^{2h}\big|f(x+t)-f(x+h)\big|\frac{1}{|t-h|}dt$$

$$\leq K\int_{-2h}^{0}\frac{\omega(|t-h|)}{|t-h|}dt + \overline{K}\int_{0}^{2h}\frac{\omega(|t-h|)}{|t-h|}dt$$

ცხადია, ცვლადის გარდაქმნით გვექნება

$$\int_{0}^{2h}\frac{\omega(|t-h|)}{|t-h|}dt = \int_{-h}^{h}\frac{\omega(|t|)}{|t|}dt$$

$$= \int_{-h}^{0}\frac{\omega(|t|)}{|t|}dt + \int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt$$

$$\leq 2\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

ანალოგიურად, აქაც თუ $t-h$ აღვნიშნავთ t–თი, მივიღებთ

$$\int_{-2h}^{0}\frac{\omega(|t-h|)}{|t-h|}dt = \int_{-3h}^{-h}\frac{\omega(|t|)}{|t|}dt$$

$$= \int_{h}^{3h}\frac{\omega(t)}{t}dt \leq C_3\frac{\omega(h)}{h}\int_{h}^{3h}dt = C_4\omega(h) \leq C_5\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

საბოლოოდ გვაქვს

$$|I_3(x,h)| \leq (2\overline{K}+C_5K)\int_{0}^{h}\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

$$|I_2(x,h)| = \Big|\big[f(x)-f(x+h)\big]\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-2h}\frac{1}{t-h}dt + \big[f(x)-f(x+h)\big]\frac{1}{\pi}\int_{2h}^{\infty}\frac{1}{t-h}dt\Big|$$

$t-h$ აღვნიშნოთ t–თი, ინტეგრალის აღების საზრვრებიც შესაბამისად შეიცვლება და გვექნება

$$|I_2(x,h)| = \Big|\big[f(x)-f(x+h)\big]\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-3h}\frac{1}{t}dt + \big[f(x)-f(x+h)\big]\frac{1}{\pi}\int_{h}^{\infty}\frac{1}{t}dt\Big|,$$

და რადგანაც კენტი ფუნქციიდან ინტეგრალი სიმეტრიულ საზღვრებში ნულის ტოლია, ამიტომ დაგვრჩება

$$= \big|\big[f(x) - f(x+h)\big]\frac{1}{\pi}\int_h^{3h}\frac{1}{t}dt\big| \le \big|f(x) - f(x+h)\big|\frac{1}{\pi}\int_h^{3h}\frac{1}{t}dt$$

$$\le A''\omega(h) \le A_2\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

მიღებულ შედეგებს თუ გავითვალისწინებთ, მაშასადამე, მართებულია შემდეგი შეფასება,

$$|H_f(x+h) - H_f(x)| = |I_1(x,h) + I_2(x,h) + I_3(x,h) + I_4(x,h)|$$

$$\le |I_1(x,h)| + |I_2(x,h)| + |I_3(x,h)| + |I_4(x,h)|$$

$$\le \big(K_1+M_4\big)\Big(\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt+h\int_h^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt\Big)+\big(A_2+(2\overline{K}+C_5K)+2C_1\big)\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt.$$

$$= \big(K_1+M_4+A_2+(2\overline{K}+C_5K)+2C_1\big)\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt+\big(K_1+M_4\big)h\int_h^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt$$

$$\le A\Big(\int_0^h\frac{\omega(t)}{t}dt+h\int_h^1\frac{\omega(t)}{t^2}dt\Big),$$

სადაც $A = max\big[\big(K_1+M_4+A_2+(2\overline{K}+C_5K)+2C_1\big), \big(K_1+M_4\big)\big]$. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. □

ამ თეორემის შედეგს წარმოადგენს შემდეგი თეორემა:

შედეგი. *ვთქვათ, ω უწყვეტობის მოდული, აკმაყოფილებს ზიგმუნდის პირობას. თუ $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ და f ფუნქციისთვის სრულდება ლიფშიცის განზოგადებული პირობა მოცემული უწყვეტობის მოდულისთვის, მაშინ $H_f \in L^p(\mathbb{R})$ და აკმაყოფილებს ლიფშიცის განზოგადებულ პირობას, იგივე უწყვეტობის მოდულისთვის.*

შევნიშნოთ, რომ ჩვენი თეორემის შედეგია ტიტჩმარშის თეორემა, თუ ავიღებთ $\omega(h) = h^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$.

დასკვნა

მაშასადამე, იმ პირობებში, როცა f ფუნქცია ეკუთვნის $L^p(\mathbb{R})$ $(p > 1)$ და აკმაყოფილებს ლიფშიცის განზოგადებულ პირობას, უწყვეტობის მოდულის თვისებების გამოყენებით მოვახდინეთ ჰილბერტის გარდაქმნისთვის პირველი რიგის სხვაობის ზემოდან შეფასება უწყვეტობის მოდულის შემცველი გამოსახულებით, რაც წარმოადგენდა ჩვენს მთავარ მიზანს.

ლიტერატურა

[1] H. K. BARI and C. B. CTECHKIN. Best approximations and differential properties of two conjugate functions.
Tr. Mosk. Mat. Obs., 1956, volume 5, Pages 483 – 522.

[2] E. C. TITCHMARSH. Introduction to the theory of fourier integrals. Oxford 1948.

[3] A. ZYGMUND. Trigonometric series. Cambrige mathematical library. 2003.