# ფურიეს ზოგადი კოეფიციენტები და კრებადობისა და შეჯამებადობის საკითხები

**გიორგი ცაგარეიშვილი(საბაკალავრო ნაშრომი)**
**ხელმძღვანელი: პროფ. ლერი გოგოლაძე**

**ანოტაცია:** ნაშრომში წარმოდგენილია საკმარისი პირობები, რომლებსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ორთონორმირებული სისტემის (ონს) ფუნქციები, იმისათვის, რომ სასრული ვარიაციის ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტებისათვის სრულდებოდეს მენშოვ-რადემახერისა და მენშოვის თეორემის პირობები. მიღებული შედეგები ახალია და გაუძლიერებადია გარკვეული აზრით. დამტკიცებულია აგრეთვე თეორემები, რომლებიც გვიჩვენებენ, რომ ყოველი ორთონორმირებული სისტემა შეიცავს ქვესისტემას, რომლის მიმართაც ყოველი სასრული ვარიაციის ფუნქციის ფურიეს მწკრივი თ. ყ. კრებადია ან შეჯამებადია ჩეზაროს მეთოდით.

# შესავალი

ზოგადი ორთონორმირებული სისტემების(ონს) თეორია დიდი ხანია წარმოადგენს შესწავლის ობიექტს. ამ მიმართულებით განსაკუთრებით აღსანიშნავია ზოგადი ორთონორმირებული მწკრივების კრებადობისა და შეჯამებადობის საკითხები. აქ ძალზე მნიშვნელოვანი შედეგებია მიღწეული მენშოვ-რადემახერის([1] გვ.87), მენშოვის[2], ორლიჩის[3], კაჩმაჟის[4] ტანდორისა[5], პ. ულიანოვის[6], ა. ოლევსკის[7], ს. ბოჩკარიოვის[8], ჟ. რ. მაკლაფლინის[9], ბ. კაშინის[10], ლ. გოგოლაძის[11], ვ. ცაგარეიშვილისა[12] და სხვათა ნაშრომებში. რაც შეეხება ფურიეს ზოგადი მწკრივების კრებადობისა და შეჯამებადობის საკითხებს, აქ უნდა აღინიშნოს ს. ბანახის[13] ფუნდამენტური თეორემა, რომლის თანახმად არსებობს ისეთი ონს, რომლის მიმართ იგივურად ერთის ტოლი ფუნქციის ფურიეს მწკრივიც კი განშლადია. ამ შედეგიდან გამომდინარეობს, რომ თუ გვინდა რომელიმე ონს-ს მიმართ, გარკვეული კლასის ფუნქციების, ფურიეს მწკრივების კრებადობას მივაღწიოთ, საჭიროა ონს-ს ფუნქციებმა დააკმაყოფილონ დამატებითი პირობები. ამ მიმართულებით უნდა აღვნიშნოთ: მაკლაფლინის, გოგოლაძისა და ცაგარეიშვილის ნაშრომები. მათი ნაშრომები ძირითადად შეეხება, სასრული ვარიაციისა და ლიფშიცის კლასის ფუნქციების ფურიეს მწკრივებს. აღნიშნულ ნაშრომში განხილულია ზოგადი ონს-ების მიმართ ფურიეს მწკრივების კრებადობისა და შეჯამებადობის საკითხები.

# მნიშვნელოვანი აღნიშვნები და თეორემები

V-თი აღვნიშნოთ [0,1]-ზე განსაზღვრული ყველა სასრული ვარიაციის ფუნქციათა სიმრავლე. A იყოს ყველა აბსოლუტურად უწყვეტი ფუნქციების სივრცე.
ასევე შემოვიღოთ აღნიშვნები:
ვთქვათ $(\varphi_{\mathrm{n}})$ არის ონს $[0,1]$ -ზე, მაშინ

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n}}(f)=\int_0^1 f(x)\varphi_{\mathrm{n}}(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

რიცხვებს ეწოდება $f\in L_2$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები.
დავუშვათ, რომ

$$P_{\mathrm{n}}(a,x)=\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}}\log k\,\varphi_{\mathrm{k}}(x) \tag{1}$$

ასევე

$$\Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)=\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{n}} a_k\log(\log(k+2))\,\varphi_k(x) \tag{2}$$

სადაც $(a_n)\in l_2$ არის ნამდვილ რიცხვთა ნებისმიერი მიმდევრობა, ხოლო

$$D_{\mathrm{n}}(a) = \max_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}} \left| \int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{dx} \right| \tag{3}$$

და

$$\Delta_{\mathrm{n}}(a) = \max_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}} \left| \int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{dx} \right|. \tag{4}$$

<u>**განმარტება 1.**</u> ვიტყვით, რომ მწკრივი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

შეჯამებადია ჩეზაროს $(\mathrm{C}, \alpha)$ მეთოდით $f$ ფუნქციისაკენ, თუ თ. ყ. $[0,1]$-ზე

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m^{\alpha}(a,\mathrm{x}) = f(x).$$

სადაც

$$\sigma_m^{\alpha}(a,\mathrm{x}) = \frac{1}{A_m^{\alpha}} \sum_{n=0}^{m} A_{m-n}^{\alpha-1} S_n(a,x)$$

და

$$S_n(a,x) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}} \varphi_{\mathrm{k}}(x),$$

ხოლო

$$A_n^{\alpha} = \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)\dots(n+\alpha)}{n!}.$$

<u>**განმარტება 2.**</u> ვიტყვით, რომ $(d_{\mathrm{n}}) \in \mathrm{B}_1$ თუ $d_n = O(1)\frac{\sqrt{n}}{\log(n+2)}$ და $(d_{\mathrm{n}}) \in \mathrm{B}_2$, თუ $d_n = O(1)\frac{\sqrt{n}}{\log(\log(n+2))}$.
<u>**ლემა 1:**</u> ნებისმიერი $\mathrm{i} = 1,2,\dots,n$-სა და $(a_n) \in l_2$ რიცხვითი მიმდევრობისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} |P_{\mathrm{n}}(a,x)|\mathrm{d}x = \mathrm{O}(1).$$

**დამტკიცება:** ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ (i=1,…,n)

$$\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} |P_{\mathrm{n}}(a,x)|\mathrm{d}x \le \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \int_0^1 \left( \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}} \log k \, \varphi_{\mathrm{k}}(x) \right)^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}}{}^2 \log^2 \mathrm{k} \right)^{1/2} \le \frac{\log \mathrm{n}}{\sqrt{n}} \left( \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}}{}^2 \right)^{1/2} = O(1)$$

ლემა 1 დამტკიცებულია.
<u>**ლემა 2:**</u> ვთქვათ $(\varphi_{\mathrm{n}})$ არის ონს $[0,1]$-ზე და $(a_n) \in l_2$ მაშინ სამართლიანია უტოლობა

$$\left| \int_0^1 \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}} \log k \, \varphi_{\mathrm{k}}(x) \, \mathrm{d}x \right| \le \left( \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}}{}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \left( \int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x \right)^2 \log^2 \mathrm{k} \right)^{1/2}.$$

**დამტკიცება:** კოშის უტოლობით გვაქვს

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} a_k \log k\, \varphi_k(x)\, dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \log k \int_0^1 \varphi_k(x) dx\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k{}^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 \varphi_n(x) dx\right)^2 \log^2 k\right)^{1/2}.$$

ლემა 2 დამტკიცებულია.

<u>**ლემა 3:**</u> ნებისმიერი $i = 1,2, \dots, n$-სა და $(a_n) \in l_2$ რიცხვითი მიმდევრობისათვის სამართლიანია შეფასება

$$\int_{i-1/n}^{i/n} |\Gamma_n(a,x)| dx = O(1).$$

**დამტკიცება:** ჰელდერის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ (i=1,...,n)

$$\int_{i-1/n}^{i/n} |\Gamma_n(a,x)| dx \le \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \log(\log(k+2)) \varphi_k(x)\right)^2 dx\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 (\log(\log(k+2)))^2\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{\log(\log(n+2))}{\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} = O(1)$$

ლემა 3 დამტკიცებულია.

<u>**ლემა 4.**</u> ვთქვათ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და $(a_n) \in l_2$ მაშინ სამართლიანია უტოლობა

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} a_k \log(\log(k+2)) \varphi_k(x)\, dx\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 \varphi_n(x) dx\right)^2 (\log(\log(k+2))^2\right)^{1/2}.$$

**დამტკიცება:** კოშის უტოლობით გვაქვს

$$\left|\int_0^1 \sum_{k=1}^{n} a_k \log(\log(k+2))\, \varphi_k(x)\, dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k \log(\log(k+2)) \int_0^1 \varphi_k(x) dx\right|$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\int_0^1 \varphi_n(x) dx\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2\right)^{1/2}.$$

ლემა 4 დამტკიცებულია.

<u>**მენშოვ-რადემახერის თეორემა(იხ.[1]გვ.87).**</u> თუ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 \log^2 n < +\infty,$$

მაშინ თითქმის ყველგან $[0, 1]$-ზე კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x).$$

<u>**მენშოვის თეორემა ([1].გვ.87).**</u> თუ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0,1]$-ზე და

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 (\log(\log(n+2)))^2 < +\infty,$$

მაშინ მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

თ.ყ. (C,$\alpha > 0$ ) შეჯამებადია [0,1]-ზე.

**ბანახის თეორემა (იხ.[13])**. ვთქვათ $f \in L_2$ ნებისმიერი არანულოვანი ფუნქციაა [0,1]-ზე. მაშინ არსებობს ონს $(\varphi_n)$ [0, 1]-ზე, ისეთი რომ

$$\text{ა)} \varlimsup_{m\to\infty} |S_m(f,x)| = +\infty$$

$$\text{ბ)} \varlimsup_{m\to\infty} |\sigma_m(f,x)| = +\infty$$

თ.ყ. [0,1]-ზე. სადაც $S_m(f,x)$ ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამია, ხოლო $\sigma_m(f,x) = \sigma_m(a,x)$ და $a_k = C_k(f)$, $k = 1,2,\dots,f$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია.

## ძირითადი ამოცანა

როგორც ბანახის თეორემა გვიჩვენებს ზოგადი ონს-ების მიმართ $f(x) = 1$ ფუნქციის ფურიეს მწკრივიც კი არ არის შეჯამებადი. მიუხედავად ამისა,მენშოვ-რადემახერისა და მენშოვის თეორემები გვაძლევს პირობებს, რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფურიეს კოეფიციენტები, რომ ფურიეს მწკრივი იყოს თ. ყ. კრებადი ან (C , $\alpha$) შეჯამებადი. გამომდინარე მოყვანილი მსჯელობიდან დაისმის ამოცანა: ვინაიდან კარგი დიფერენციალური თვისებები არ იძლევა იმის გარანტიას რომ ასეთი ფუნქციების ფურიეს ზოგადი მწკრივები იყოს კრებადი ან შეჯამებადი, ამიტომ მოიძებნოს პირობები $(\varphi_n)$ონს-ს $\varphi_n$ ფუნქციებისათვის ისეთი, რომ კერძოდ, სასრული ვარიაციის ფუნქციების ფურიეს კოეფიციენტებმა დააკმაყოფილონ მენშოვის-რადემახერის ან მენშოვის თეორემის პირობები. მსგავსი ტიპის ამოცანები განხილულია ნაშრომებში [14-15].

ჩვენს ნაშრომში ძირითადად ნაპოვნია ზემოაღნიშნული პირობები და განზოგადოებულია შემდეგი ოთხი თეორემა (იხ. [16]-[17]).

**თეორემა A([16]).** ვთქვათ $(\varphi_n)$ არის ონს [0, 1]-ზე და $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0$ $(n = 1,2,\dots)$. ყოველი სასრული ვარიაციის ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n{}^2(f) \log^2 n < +\infty,$$

როცა ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$-სათვის სრულდება

$$B_n(a) = O\big(e_n(a)\big),$$

სადაც

$$B_n(a) = \max_{1\le i\le n} \left| \int_0^{i/n} M_n(a,x)dx \right|, \qquad M_n(a,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \log^2(k+1)\, \varphi_k(x)$$

და

$$e_n(a) = \left( \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 \log^2(k+1) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**თეორემა B([16]).** ვთქვათ რომელიმე $(b_n) \in l_2$ მიმდევრობისათვის სრულდება პირობა

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_n(b)}{e_n(b)} = +\infty,$$

მაშინ არსებობს ისეთი $g \in A$ ფუნქცია, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n{}^2(g) \log^2 n = +\infty.$$

<u>**თეორემა C([17]).**</u> ვთქვათ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და $\int_0^1 \varphi_n(x) dx = 0$ $(n = 1,2, \dots)$. თუ ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$ მიმდევრობისთვის სრულდება

$$B_n(a) = O\big(e_n(a)\big)$$

სადაც

$$B_n(a) = \max_{1\le i\le n} \left| \int_0^{i/n} M_n(a, x) dx \right|,$$

ასევე

$$M_n(a, x) = \sum_{k=1}^{n} a_k (\log(\log(k + 2)))^2 \varphi_k(x)$$

და

$$e_n(a) = \left( \sum_{k=1}^{n} a_k{}^2 (\log(\log(k + 2)))^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

მაშინ ყოველი $f \in V$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n{}^2(f) \, (\log(\log(n + 2)))^2 < +\infty.$$

<u>**თეორემა D([17]).**</u> ვთქვათ რომელიმე $(b_n) \in l_2$ მიმდევრობისათვის სრულდება პირობა

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{B_n(b)}{e_n(b)} = +\infty.$$

მაშინ არსებობს $g \in A$ ფუნქცია, ისეთი რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n{}^2(g) \, (\log(\log(n + 2)))^2 = +\infty.$$

აღნიშნულ ნაშრომში ჩვენ მოვძებნეთ პირობები, რომლებიც ცვლიან თეორება A-ს, თეორემა B-ს, თეორემა C-ს და თეორემა D-ს პირობებს და ნაჩვენები გვაქვს, რომ ეს პირობები გარკვეულ შემთხვევებში ექვიალენტურია. ამასთანავე განზოგადოებულია ზემოხსენებული თეორემები.

# ძირითადი შედეგები

## ა)კრებადობის საკითხები

<u>**თეორემა 1(იხ.[18]):**</u> ვთქვათ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^1 \varphi_k(x) dx \right)^2 \log^2 k < +\infty$$

თუ ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$-სათვის სრულდება პირობა

$$D_n(a) = O(1), \tag{5}$$

მაშინ ყოველი $f \in V$-სათვის სამართლიანია

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}{}^{2}(f)\log^{2}\mathrm{n} < +\infty.$$

**დამტკიცება:**

ვთქვათ $(a_n) \in l_2$ ნებისმიერი მიმდევრობაა, მაშინ(იხ. (1))

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\mathrm{k}}(f)\log k\, a_k = \int_0^1 f(x)\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k \log k\, \varphi_{\mathrm{k}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x. \tag{6}$$

სამართლიანია ტოლობა(იხ. [14])

$$\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}\left(f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right) - f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right)\right)\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} F(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\left(f(x) - f\left(\mathrm{i}/\mathrm{n}\right)\right)F(x)\mathrm{d}x + f(1)\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x, \tag{7}$$

სადაც $f, F \in L_2$ და $f$ ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ სასრულ მნიშვნელობებს $[0,1]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში.

(7)-ში ვიგულისხმოთ, რომ $f \in V$ და $F(x) = P_{\mathrm{n}}(a,x)$. გვექნება

$$\int_0^1 f(x)P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}\left(f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right) - f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right)\right)\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\left(f(x) - f\left(\mathrm{i}/\mathrm{n}\right)\right)P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x + f(1)\int_0^1 P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3. \tag{8}$$

შევაფასოთ $\mathrm{I}_1$, $\mathrm{I}_2$ და $\mathrm{I}_3$.

ვინაიდან $f \in V$, ამიტომ (5)-ის თანახმად(იხ. (3)) ვღებულობთ

$$|\mathrm{I}_1| \le \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}\left|f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right) - f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right)\right|\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x\right| \le V(f)\max_{1\le\mathrm{i}\le\mathrm{n}}\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x\right| = O(1)D_{\mathrm{n}}(a) = O(1). \tag{9}$$

ლემა 1-ის გამოყენებით გვაქვს

$$|\mathrm{I}_2| \le \left|\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\left(f(x) - f\left(\mathrm{i}/\mathrm{n}\right)\right)P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x\right| \le \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \sup_{x\in\left[\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{n}},\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right]}\left|f(x) - f\left(\mathrm{i}/\mathrm{n}\right)\right|\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}|P_{\mathrm{n}}(a,x)|\mathrm{d}x \le V(f)O(1) = O(1). \tag{10}$$

ლემა 2-სა და თეორემა 1-ის პირობის გათვალისწინებით

$$|\mathrm{I}_3| = |f(1)|\left|\int_0^1 P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x\right| = O(1)\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k{}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2\log^2\mathrm{k}\right)^{1/2} = O(1)$$

თუ (9)-ს, (10)-სა და უკანასკნელ უტოლობას გავითვალისწინებთ (6)-ში, დავასკვნით

$$\left|\int_0^1 f(x)P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x\right| = O(1).$$

ამის გამო (6)-დან გვექნება

$$\left|\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\mathrm{k}}(f)\log k\, a_k\right| = O(1).$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ ყოველი $(a_n) \in l_2$-სათვის კრებადია მწკრივი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} C_{\mathrm{k}}(f)\log k\, a_k.$$

ამრიგად ცნობილი თეორემის თანახმად გვექნება, რომ $(C_{\mathrm{k}}(f)\log k) \in l_2$,

ანუ ყოველი $f \in \mathrm{V}$-ისათვის

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} {C_{\mathrm{n}}}^2(f)\log^2 \mathrm{n} < +\infty.$$

თეორემა 1 დამტკიცებულია.

<u>**თეორემა 2(იხ.[18]):**</u> ვთქვათ $(\varphi_{\mathrm{n}})$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 \log^2 \mathrm{k} < +\infty$$

თუ ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$-სათვის სრულდება პირობა

$$D_{\mathrm{n}}(a) = \mathrm{O}(1),$$

მაშინ ყოველი $f \in V$-სათვის მწკრივი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} C_{\mathrm{k}}(f)\varphi_{\mathrm{n}}(x)$$

კრებადია თ. ყ. $[0, 1]$ -ზე .

თეორემა 2-ის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 1-სა და მენშოვ-რადემახერის თეორემიდან.

<u>**თეორემა 3(იხ.[18]):**</u> ვთქვათ $(\varphi_{\mathrm{n}})$ არის ონს $[0, 1]$-ზე. თუ რომელიმე $(b_n) \in l_2$-სათვის სრულდება პირობა

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} D_{\mathrm{n}}(b) = +\infty,$$

მაშინ არსებობს ისეთი $h \in A$, ფუნქცია, რომ

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} {C_{\mathrm{n}}}^2(h)\log^2 \mathrm{n} = +\infty.$$

**დამტკიცება:**

ვთქვათ

$$D_{\mathrm{n}}(b) = \max_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}}\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{dx}\right| = \left|\int_0^{\mathrm{i_n}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{dx}\right|, \tag{11}$$

სადაც $1 \le \mathrm{i_n} < \mathrm{n}$.

განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა

$$f_{\mathrm{n}}(x) = \begin{cases} 0, \text{როცა } x \in \left[0, \frac{\mathrm{i_n}}{\mathrm{n}}\right] \\ 1, \text{როცა } x \in \left[\frac{\mathrm{i_n}+1}{\mathrm{n}}, 1\right] \\ \text{უწყვეტი და წრფივი, როცა } x \in \left[\frac{\mathrm{i_n}}{\mathrm{n}}, \frac{\mathrm{i_n}+1}{\mathrm{n}}\right] \end{cases}. \qquad (12)$$

(7) ტოლობაში ვიგულისხმოთ, რომ $f = f_{\mathrm{n}}(x)$ და $F(x) = P_{\mathrm{n}}(b, x)$. გვექნება

$$\int_0^1 f_{\mathrm{n}}(x) P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}\left(f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right) - f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right)\right)\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x +$$

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \left(f_{\mathrm{n}}(x) - f_{\mathrm{n}}(\mathrm{i}/\mathrm{n})\right) P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x + f_{\mathrm{n}}(1)\int_0^1 P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x = \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2 + \mathrm{J}_3. \qquad (13)$$

(11)-სა და (12)-ს გამოყენებით ვღებულობთ

$$|\mathrm{J}_1| = \left|\sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}(f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right) - f_{\mathrm{n}}\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right))\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{\mathrm{i_n}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x\right| = D_{\mathrm{n}}(b). \qquad (14)$$

მეორეს მხრივ (12)-სა და ლემა 1-ის თანახმად გვაქვს

$$|\mathrm{J}_2| = \left|\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \left(f_{\mathrm{n}}(x) - f_{\mathrm{n}}(\mathrm{i}/\mathrm{n})\right) P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x\right| \le \int_{\frac{\mathrm{i_n}}{\mathrm{n}}}^{\frac{\mathrm{i_n}+1}{\mathrm{n}}} |P_{\mathrm{n}}(b, x)|\mathrm{d}x = \mathrm{O}(1). \qquad (15)$$

შემდეგ, ლემა 2 გათვალისწინებით

$$|\mathrm{J}_3| = |f_{\mathrm{n}}(1)|\left|\int_0^1 P_{\mathrm{n}}(b, x)\mathrm{d}x\right| = O(1)\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} b_{\mathrm{k}}{}^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 \log^2 \mathrm{k}\right)^{1/2}.$$

ახლა თუ

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 \log^2 \mathrm{k} = +\infty,$$

მაშინ თეორემა 2 დამტკიცებულია, რადგან $\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x$ არის $f(x) = 1$-ის ფურიეს კოეფიციენტები.

იმ შემთხვევაში თუკი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 \log^2 \mathrm{k} < +\infty,$$

მაშინ ვინაიდან $(b_n) \in l_2$,

$$|\mathrm{J}_3| = O(1).$$

თუ (14)-ს, (15)-სა და $J_3$-ის შეფასებას გავითვალისწინებთ (13)-ში მივიღებთ

$$\left|\int_0^1 f_n(x)P_n(b,x)\mathrm{d}x\right| \geq D_n(b) - O(1),$$

საიდანაც თეორემა 3-ის პირობის თანახმად

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^1 f_n(x)P_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = +\infty. \tag{16}$$

შემდეგ განვიხილოთ A სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალების შემდეგი მიმდევრობა

$$U_n(f) = \int_0^1 f(x)P_n(b,x)\mathrm{d}x.$$

(16)-ის თანახმად გვექნება, რომ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|U_n(f_n)| = +\infty. \tag{17}$$

ვინაიდან (იხ. (10))

$$\|f_n\|_A = \|f_n\|_C + \int_0^1 |f_n'(x)|\mathrm{d}x = 2,$$

ამიტომ ბანახ-შტეინჰაუზის თეორემის თანახმად(იხ (17)) იარსებებს ისეთი $h \in A$, ფუნქცია, რომ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|U_n(h)| = +\infty.$$

საიდანაც

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^1 h(x)P_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = +\infty. \tag{17}$$

საბოლოოდ, რადგან $(b_n) \in l_2$, ამიტომ კოშის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|\int_0^1 h(x)P_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^n b_k \log k \int_0^1 h(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^n b_k \log k\, C_k(h)\right| \leq \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^n C_k^2(h)\log^2 k\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= O(1)\left(\sum_{k=1}^n C_k^2(h)\log^2 k\right)^{\frac{1}{2}}.$$

აქედან (18)-ს თანახმად გვექნება, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n C_k^2(h)\log^2 k = +\infty.$$

თეორემა 3 დამტკიცებულია.

**განმარტება:** $\mathbf{B_1}$-ით აღვნიშნოთ იმ $(d_\mathrm{n}) \in \mathbf{B_1}$ არაკლებადი მიმდევრობების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ $\frac{d_n \log n}{\sqrt{n}} < M$ პირობას, სადაც M დამოკიდებულია მხოლოდ $(d_\mathrm{n})$ მიმდევრობაზე. ანალოგიურად განვმარტოთ $(d_\mathrm{n}) \in \mathbf{B_2}$ სიმრავლე, სადაც $\frac{d_n \operatorname{loglog} n}{\sqrt{n}} < M$.

**თეორემა 4(იხ.[18]):** ვიგულისხმოთ, რომ $(d_\mathrm{n}) \in \mathbf{B_1}$ მოცამული მიმდევრობაა, მაშინ ყოველი $[0, 1]$-ზე განსაზღვრული ონს $(\varphi_\mathrm{n})$, სადაც $\int_0^1 \varphi_\mathrm{n}(x)\mathrm{d}x = 0, (\mathrm{n} = 1,2, \dots,)$ შეიცავს ქვესისტემას $(\varphi_{\mathrm{n}_k})$-ს, ისეთს, რომ ყოველი $f \in V$-სათვის შესრულდება პირობა

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} d_k^2 C_{\mathrm{n}_k}^2(f) \log^2 k < +\infty. \tag{19}$$

**დამტკიცება:**

ვიგულოსხმოთ რომ $(\varphi_\mathrm{n})$ სისტემა სრულია, მაშინ პარსევალის ტოლობის თანახმად, ყოველი $x \in [0,1]$ −ისათვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^x \varphi_\mathrm{n}(\mathrm{u})\mathrm{du} \right)^2 = x.$$

აქედან, დინის თეორემის თანახმად იარსებებს $(\mathrm{n}_k)$ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიდებრობა, რომ თანაბრად $x \in [0,1]$-ის მიმართ

$$\sum_{n=\mathrm{n}_k}^{\infty} \left( \int_0^x \varphi_\mathrm{n}(\mathrm{u})\mathrm{du} \right)^2 < k^{-3}.$$

საიდანაც თანაბრად $x \in [0,1]$-ის მიმართ

$$\left| \int_0^x \varphi_{\mathrm{n}_k}(\mathrm{u})\mathrm{du} \right| < k^{-\frac{3}{2}}. \tag{20}$$

ცხადია რომ (20)-ს ადგილი ექნება მაშინაც, როცა სისტემა არ არის სრული.

განვიხილოთ ონს $(\varphi_{\mathrm{n}_k})$ და ვთქვათ $f \in V$ ნებისმიერი ფუნქციაა, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k C_{\mathrm{n}_k}(f) \log k \, a_k = \int_0^1 f(x) \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k a_k \log k \, \varphi_{\mathrm{n}_k}(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) P_\mathrm{m}(d, a, x) \mathrm{d}x, \tag{21}$$

სადაც $(d_k) \in \mathrm{B}$, $(a_n) \in l_2$ არიან ნებისმიერი მიმდევრობები და

$$P_\mathrm{m}(d, a, x) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k a_k \log k \, \varphi_{\mathrm{n}_k}(x).$$

თუ (7) ტოლობაში ვიგულისხმებთ, რომ $f \in V$, $F(x) = P_\mathrm{m}(d, a, x)$ და $\mathrm{n} = \mathrm{m}$ მივიღებთ

$$\int_0^1 f(x) P_\mathrm{m}(d, a, x) = \sum_{i=1}^{\mathrm{m}-1} \left( f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right) - f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{m}}\right) \right) \int_0^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}} P_\mathrm{m}(d, a, x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} \int_{\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{m}}}^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}} \left( f(x) - f\left({}^{\mathrm{i}}/_{\mathrm{m}}\right) \right) P_\mathrm{m}(d, a, x)\mathrm{d}x = S_1 + \mathrm{S}_2. \tag{22}$$

ვინაიდან $f \in V$, ხოლო $(d_\mathrm{n}) \in \mathrm{B}$, (20)-ის გათვალისწინებით და კოშის უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$|S_1| = \left|\sum_{i=1}^{m-1}\left(f\left(\frac{i}{m}\right) - f\left(\frac{i+1}{m}\right)\right)\int_0^{\frac{i}{m}} P_m(d,a,x)dx\right| \le V(f) \max_{1\le i\le m}\left|\int_0^{\frac{i}{m}}\sum_{k=1}^{m} d_k a_k \log k\, \varphi_{n_k}(x)\, dx\right|$$

$$= O(1)\max_{1\le i\le m}\left|\sum_{k=1}^{m} d_k a_k \log k \int_0^{\frac{i}{m}} \varphi_{n_k}(x)dx\right| = O(1)\sum_{k=1}^{m} d_k|a_k|k^{-\frac{3}{2}}\log k$$

$$= O(1)\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{m} d_k^2 k^{-3}\log^2 k\right)^{\frac{1}{2}} = O(1)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{k\cdot M^2}{\log^2 k}k^{-3}\log^2 k\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$O(1)\cdot M\cdot\left(\sum_{k=1}^{m} k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = O(1). \tag{23}$$

შემდეგ, რადგან $(d_n) \in B$ და $f \in V$ ჰელდერის უტოლობა გვაძლევს

$$|S_2| = \left|\sum_{i=1}^{m}\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}\left(f(x) - f\left({}^{i}/_{m}\right)\right)P_m(d,a,x)dx\right| \le \sum_{k=1}^{m}\sup_{x\in\left[\frac{i-1}{m},\frac{i}{m}\right]}\left|f(x) - f\left({}^{i}/_{m}\right)\right|\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}|P_m(d,a,x)|dx$$

$$\le V(f)\max_{1\le i\le m}\int_{\frac{i-1}{m}}^{\frac{i}{m}}|P_m(d,a,x)|dx = \frac{O(1)}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{m} d_k a_k \log k\, \varphi_{n_k}(x)\right)^2 dx\right)^{1/2}$$

$$= \frac{O(1)}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1}^{m} d_k^2 a_k^2 \log^2 k\right)^{1/2} \le O(1)\frac{d_m \log m}{\sqrt{m}}\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{1/2}$$

$$= O(1)\cdot M = O(1) \tag{24}$$

თუ (23)-ს და (24)-ს გავითვალისწინებთ (22) დავრწმუნდებით, რომ ყოველი $(a_n) \in l_2$-სათვის

$$\int_0^1 f(x)P_m(d,a,x) = O(1).$$

ხოლო ამის საფუძველზე (21)-დან დავასკვნით, რომ ყოველი $(a_n) \in l_2$-სათვის კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k C_{n_k}(f)\log k\, a_k.$$

ე. ი. ყოველი $f \in V$-სათვის

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 C_{n_k}^2(f)\log^2 k < +\infty.$$

თეორემა 4 დამტკიცებულია.

**<u>თეორემა 5(იხ.[18]):</u>** ვთქვათ $(d_n) \in B_1$ ნებისმიერი მიმდევრობაა, $(\varphi_n)$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და $\int_0^1 \varphi_n(x)dx = 0, n = 1,2, \ldots$ მაშინ იგი შეიცავს ისეთ ქვესისტემას $(\varphi_{n_k})$-ს, რომ ყოველი $f \in V$-სათვის თითქმის ყველგან [0,1]-ზე კრებადია მწკრივი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} d_k C_{\mathrm{n}_k}(f)\varphi_{\mathrm{n}_k}(x).$$

თეორემა 5-ის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 4-სა და მენშოვ-რადემახერის თეორემიდან.

## ბ)შეჯამებადობის საკითხები

**თეორემა 6(იხ.[19]).** ვთქვათ $(\varphi_{\mathrm{n}})$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(n+2)))^2 < +\infty.$$

თუ ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$ მიმდევრობისათვის სრულდება პირობა

$$\Delta_{\mathrm{n}}(a) = O(1), \tag{25}$$

მაშინ ყოველი $f \in V$ ფუნქციისს ფურიეს კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ უტოლობას

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2(f)(\log(\log(n+2)))^2 < +\infty.$$

**დამტკიცება:**

ვთქვათ $(a_n) \in l_2$ ნებისმიერი მიმდევრობაა, მაშინ

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_k(f)\log\log k\, a_k = \int_0^1 f(x)\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k \log\log k\,\varphi_k(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)dx. \tag{26}$$

სამართლიანია ტოლობა (იხ. [14])

$$\int_0^1 f(x)F(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}\left(f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right)-f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right)\right)\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} F(x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{\mathrm{n}}\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\left(f(x)-f\left({}^{\mathrm{i}}/_{\mathrm{n}}\right)\right)F(x)\mathrm{d}x + f(1)\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x, \tag{27}$$

სადაც $f, F \in L_2$ და $f$ ფუნქცია ღებულობს მხოლოდ სასრულ მნიშვნელობებს $[0,1]$ ინტერვალის ყოველ წერტილში.

(27)-ში ვიგულისხმოთ, რომ $f \in V$ და $F(x) = \Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)$, გვექნება

$$\int_0^1 f(x)\Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)dx = \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}\left(f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right)-f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right)\right)\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)dx + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\int_{\mathrm{i}-1/\mathrm{n}}^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\left(f(x)-f\left({}^{\mathrm{i}}/_{\mathrm{n}}\right)\right)\Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)dx + f(1)\int_0^1 \Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)dx$$
$$= \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3. \tag{28}$$

შევაფასოთ $\mathrm{X}_1$, $\mathrm{X}_2$ და $\mathrm{X}_3$.

ვინაიდან $f \in V$, ამიტომ ვღებულობთ

$$|\mathrm{X}_1| \le \sum_{i=1}^{\mathrm{n}-1}\left|f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right)-f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{n}}\right)\right|\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)dx\right| \le V(f)\max_{1\le\mathrm{i}\le\mathrm{n}}\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)dx\right| = O(1)\Delta_{\mathrm{n}}(a) = O(1). \tag{29}$$

$$|X_2| \le \left|\sum_{i=1}^{n} \int_{i-1/n}^{i/n} (f(x) - f(i/n))\Gamma_n(a,x)dx\right| \le \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in\left[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}\right]} |f(x) - f(i/n)| \int_{i-1/n}^{i/n} |\Gamma_n(a,x)|dx \le V(f)O(1) = O(1). \qquad (30)$$

$$|X_3| = |f(1)| \left|\int_0^1 \Gamma_n(a,x)\mathrm{d}x\right| = O(1)\left(\sum_{k=1}^{n} a_n^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 \varphi_n(x)dx\right)^2 (\log(\log(n+2)))^2\right)^{1/2} = O(1)$$

ამ უკანასკნელ უტოლობასთან ერთად (29)-სა და (30) გავითვალისწინებთ (28)-ში, დავასკვნით

$$\left|\int_0^1 f(x)\Gamma_n(a,x)dx\right| = O(1).$$

ამის გამო (26)-დან გვექნება

$$\left|\sum_{k=1}^{n} C_k(f)\log(\log(k+2))\, a_k\right| = O(1).$$

საიდანაც ვღებულობთ, რომ ყოველი $(a_n) \in l_2$-სათვის კრებადია მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k(f)\log(\log(k+2))\, a_k < +\infty.$$

ამრიგად ცნობილი თეორემის თანახმად გვექნება, რომ $C_k(f)\log(\log(k+2)) \in l_2$, ანუ ყოველი $f \in \mathrm{V}$-ისათვის

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n{}^2(f)\,(\log\log n)^2 < +\infty.$$

თეორემა 6 დამტკიცებულია.

<u>**თეორემა 7(იხ.[19]).**</u> ვთქვათ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2 < +\infty.$$

თუ ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$-სათვის სრულდება პირობა

$$\Delta_n(a) = \mathrm{O}(1),$$

მაშინ ყოველი $f \in V$-სათვის მწკრივი

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k(f)\varphi_n(x)$$

$(\mathrm{C}, \alpha > 0)$ შეჯამებადია თ. ყ. $[0,1]$ -ზე.

თეორემა 7-ის სამართლიანობა გამომდინარეობს თეორემა 6-დან და მენშოვის თეორემიდან.

<u>**თეორემა 8(იხ.[19]).**</u> ვთქვათ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0, 1]$-ზე. თუ რომელიმე $(b_n) \in l_2$-სათვის სრულდება პირობა

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Delta_n(b) = +\infty,$$

მაშინ არსებობს ისეთი $h \in A$, ფუნქცია, რომ

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\ 2}(h)\,(\log(\log(n+2)))^2 = +\infty.$$

**დამტკიცება:**

ვთქვათ

$$\Delta_n(b) = \max_{1\le i\le n}\left|\int_0^{i/n} \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{i_n/n} \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right|, \tag{31}$$

სადაც $1 \le i_n < n$.

განვიხილოთ ფუნქციათა შემდეგი მიმდევრობა

$$f_n(x) = \begin{cases} 0,\text{როცა } x \in \left[0,\frac{i_n}{n}\right] \\ 1,\text{როცა } x \in \left[\frac{i_n+1}{n},1\right] \\ \text{უწყვეტი და წრფივი, როცა } x \in \left[\frac{i_n}{n},\frac{i_n+1}{n}\right] \end{cases}. \tag{32}$$

(27) ტოლობაში ვიგულისხმოთ, რომ $f = f_n(x)$ და $F(x) = \Gamma_n(b,x)$. გვექნება

$$\int_0^1 f_n(x)\Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i+1}{n}\right)\right)\int_0^{i/n} \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n}\int_{i-1/n}^{i/n}\left(f_n(x) - f_n(i/n)\right)\Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x + f_n(1)\int_0^1 \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x$$

$$= \Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Upsilon_3. \tag{33}$$

(31)-სა და (32)-ს გამოყენებით ვღებულობთ

$$|\Upsilon_1| = \left|\sum_{i=1}^{n-1}(f_n\left(\frac{i}{n}\right) - f_n\left(\frac{i+1}{n}\right))\int_0^{i/n} \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_0^{i_n/n} \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = D_n(b). \tag{34}$$

მეორეს მხრივ (32)-სა და ლემა 3-ის თანახმად გვაქვს

$$|\Upsilon_2| = \left|\sum_{k=1}^{n}\int_{i-1/n}^{i/n}\left(f_n(x) - f_n(i/n)\right)\Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| \le \int_{\frac{i_n}{n}}^{\frac{i_n+1}{n}} |\Gamma_n(b,x)|\mathrm{d}x = O(1). \tag{35}$$

შემდეგ, ლემა 4-ის გათვალისწინებით

$$|\Upsilon_3| = |f_n(1)|\left|\int_0^1 \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = O(1)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2\right)^{1/2}.$$

ახლა თუ

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2=+\infty,$$

მაშინ თეორემა 8 დამტკიცებულია, ვინაიდან $\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x$ არის $f(x)=1$-ის ფურიეს კოეფიციენტები.

იმ შემთხვევაში თუკი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2<+\infty,$$

მაშინ ვინაიდან $(b_n)\in l_2$,

$$|\mathrm{J}_3|=O(1).$$

თუ (34)-ს, (35)-სა და $\Upsilon_3$-ის შეფასებას გავითვალისწინებთ (33)-ში მივიღებთ

$$\left|\int_0^1 f_{\mathrm{n}}(x)\Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x\right|\geq D_{\mathrm{n}}(b)-\mathrm{O}(1),$$

საიდანაც თეორემა 8-ის პირობის თანახმად

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_0^1 f_{\mathrm{n}}(x)\Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x\right|=+\infty. \tag{36}$$

შემდეგ განვიხილოთ A სივრცეზე განსაზღვრული წრფივი, უწყვეტი ფუნქციონალების შემდეგი მიმდევრობა

$$\mathrm{U}_{\mathrm{n}}(f)=\int_0^1 f(x)\Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x.$$

(36)-ის თანახმად გვექნება, რომ

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{U}_{\mathrm{n}}(f_{\mathrm{n}})|=+\infty. \tag{37}$$

ვინაიდან (იხ. (32))

$$\|f_n\|_A=\|f_n\|_C+\int_0^1 |f_n'(x)|\mathrm{d}x=2,$$

ამიტომ ბანახ-შტეინჰაუზის თეორემის თანახმად(იხ (37)) იარსებებს ისეთი $h\in A$, ფუნქცია, რომ

$$\varlimsup_{n\to\infty}|\mathrm{U}_{\mathrm{n}}(h)|=+\infty.$$

საიდანაც

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_0^1 h(x)\Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x\right|=+\infty. \tag{38}$$

საბოლოოდ, რადგან $(b_n)\in l_2$, ამიტომ კოშის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ

$$\left|\int_0^1 h(x)\Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \log\log k \int_0^1 h(x)\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} b_k \log\log k\, C_k(h)\right|$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} C_k^2(h)(\log(\log(k+2)))^2\right)^{\frac{1}{2}} = O(1)\left(\sum_{k=1}^{n} C_k^2(h)(\log(\log(k+2)))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

აქედან (38)-ს თანახმად გვექნება, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} C_k^2(h)(\log(\log(k+2)))^2 = \lim_{n\to\infty}\left|\int_0^1 h(x)\Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| =+\infty.$$

თეორემა 8 დამტკიცებულია.

**<u>თეორემა 9(იხ.[19]):</u>** ნებისმიერი $(d_n) \in B_2$ მიმდევრობისათვის, $[0,1]$-ზე მოცემული ყოველი ონს $(\varphi_n)$ შეიცავს ისეთ ქვესისტემას $(\varphi_{n_k})$-ს, რომ ყოველი $f \in V$-სათვის შესრულდება პირობა

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 C_{n_k}^2(f)(\log(\log(k+2)))^2 < +\infty. \qquad (39)$$

**დამტკიცება:**

ვიგულისხმოთ რომ $(\varphi_n)$ სისტემა სრულია, მაშინ პარსევალის ტოლობის თანახმად, ყოველი $x \in [0,1]$-ისათვის

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x \varphi_n(\mathrm{u})\mathrm{du}\right)^2 = x.$$

აქედან, დინის თეორემის თანახმად იარსებებს $(n_k)$ ნატურალურ რიცხვთა ზრდადი მიდებრობა, რომ თანაბრად $x \in [0,1]$-ის მიმართ

$$\sum_{n=n_k}^{\infty}\left(\int_0^x \varphi_n(\mathrm{u})\mathrm{du}\right)^2 < k^{-3}.$$

საიდანაც თანაბრად $x \in [0,1]$-ის მიმართ

$$\left|\int_0^x \varphi_{n_k}(\mathrm{u})\mathrm{du}\right| < k^{-\frac{3}{2}}. \qquad (40)$$

ცხადია რომ (40)-ს ადგილი ექნება მაშინაც, როცა სისტემა არ არის სრული.

განვიხილოთ ონს $(\varphi_{n_k})$ და ვთქვათ $f \in V$ ნებისმიერი ფუნქციაა, მაშინ ადგილი აქვს ტოლობას

$$\sum_{k=1}^{m} d_k C_{n_k}(f)\log(\log(k+2))\, a_k = \int_0^1 f(x)\sum_{k=1}^{m} d_k a_k \log(\log(k+2))\,\varphi_{n_k}(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\Gamma_m(d,a,x)dx, \qquad (41)$$

სადაც $(d_k) \in B$, $(a_n) \in l_2$ არიან ნებისმიერი მიმდევრობები და

$$\Gamma_m(d,a,x) = \sum_{k=1}^{m} d_k a_k \log(\log(k+2))\,\varphi_{n_k}(x).$$

თუ (27) ტოლობაში ვიგულისხმებთ, რომ $f \in V$, $F(x) = \Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)$ და $\mathrm{n} = \mathrm{m}$ მივიღებთ

$$\int_0^1 f(x)\Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)$$

$$= \sum_{i=1}^{\mathrm{m}-1}\left(f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right) - f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{m}}\right)\right)\int_0^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}} \Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{\mathrm{m}} \int_{\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{m}}}^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}} \left(f(x) - f\left({}^{\mathrm{i}}/_{\mathrm{m}}\right)\right)\Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)\mathrm{d}x + f_{\mathrm{m}}(1)\int_0^1 \Gamma_{\mathrm{m}}(a, x)\mathrm{d}x$$

$$= Z_1 + \mathrm{Z}_2 + Z_3 \tag{42}$$

ვინაიდან $f \in V$, ხოლო $(d_{\mathrm{n}}) \in \mathrm{B}$, (40)-ის გათვალისწინებით და კოშის უტოლობის გამოყენებით ვღებულობთ

$$|Z_1| = \left|\sum_{i=1}^{\mathrm{m}-1}\left(f\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right) - f\left(\frac{\mathrm{i}+1}{\mathrm{m}}\right)\right)\int_0^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}} \Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)\mathrm{d}x\right| \le V(f)\max_{1\le\mathrm{i}\le\mathrm{m}}\left|\int_0^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k a_{\mathrm{k}} \log(\log(k+2))\,\varphi_{\mathrm{n}_k}(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$= \mathrm{O}(1)\max_{1\le\mathrm{i}\le\mathrm{m}}\left|\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k a_{\mathrm{k}}\log(\log(k+2))\int_0^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}}\varphi_{\mathrm{n}_k}(x)\mathrm{d}x\right| = \mathrm{O}(1)\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k|a_{\mathrm{k}}|k^{-\frac{3}{2}}\log(\log(k+2))$$

$$= \mathrm{O}(1)\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k^2 k^{-3}(\log(\log(k+2)))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mathrm{O}(1)\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}}\frac{k\cdot\mathrm{M}^2}{(\log(\log(k+2)))^2}k^{-3}(\log(\log(k+2)))^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \mathrm{O}(1)\cdot\mathrm{M}\cdot\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathrm{O}(1). \tag{43}$$

შემდეგ, რადგან $(d_{\mathrm{n}}) \in \mathrm{B}$ და $f \in V$ ჰელდერის უტოლობა გვაძლევს

$$|\mathrm{Z}_2| = \left|\sum_{i=1}^{\mathrm{m}}\int_{\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{m}}}^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}}\left(f(x) - f\left({}^{\mathrm{i}}/_{\mathrm{m}}\right)\right)\Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)\mathrm{d}x\right| \le \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}}\sup_{x\in\left[\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{m}},\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}\right]}\left|f(x) - f\left({}^{\mathrm{i}}/_{\mathrm{m}}\right)\right|\int_{\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{m}}}^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}}|\Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)|\mathrm{d}x$$

$$\le V(f)\max_{1\le\mathrm{i}\le\mathrm{m}}\int_{\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{m}}}^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}}}|\Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x)|\mathrm{d}x = \frac{O(1)}{\sqrt{n}}\left(\int_0^1\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k a_{\mathrm{k}}\log(\log(k+2))\,\varphi_{\mathrm{n}_k}(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} =$$

$$= \frac{O(1)}{\sqrt{m}}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} d_k^2 a_{\mathrm{k}}{}^2(\log(\log(k+2)))^2\right)^{1/2} \le O(1)\frac{d_{\mathrm{m}}\log(\log(\mathrm{m}+2))}{\sqrt{m}}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{m}} a_{\mathrm{k}}{}^2\right)^{1/2} = O(1)\cdot\mathrm{M} = O(1) \tag{44}$$

(40)-სა და კოშის უტოლობის გამოყენებით გვექნება $((a_n) \in l_2)$

$$|Z_3| = \left|\int_0^1 \sum_{k=1}^{m} d_k a_k \varphi_k(x) \log(\log(k+2))\, dx\right| = O(1)\sum_{k=1}^{m} d_k |a_k| \left|\int_0^1 \varphi_k(x)dx\right| \log(\log(k+2))$$
$$= O(1)\sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|\sqrt{k}}{\log(\log(k+2))} k^{\frac{-3}{2}} \log(\log(k+1))$$
$$= O(1)\left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{(\log(\log(k+2)))^2}\, k^{-3}(\log(\log(k+2)))^2\right)^{1/2} = O(1).$$

თუ უკანასკნელ პირობას, (43)-ს და (44)-ს გავითვალისწინებთ (42)-ში დავრწმუნდებით, რომ ყოველი $(a_n) \in l_2$-სათვის

$$\int_0^1 f(x)\Gamma_{\mathrm{m}}(d, a, x) = O(1).$$

ხოლო ამის საფუძველზე (41)-დან დავასკვნით, რომ ყოველი $(a_n) \in l_2$-სათვის კრებადია მწკრივი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} d_k C_{\mathrm{n}_k}(f) \log(\log(k+2))\, a_k < +\infty.$$

ე. ი. ყოველი $f \in V$-სათვის

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} d_k^2 C_{\mathrm{n}_k}^2(f)(\log(\log(k+2)))^2 < +\infty.$$

თეორემა 9 დამტკიცებულია.

<u>**თეორემა 10(იხ.[19]).**</u> ნებისმიერი $(d_{\mathrm{n}}) \in \mathrm{B}_2$ მიმდევრობისათვის , ყოველი ონს $(\varphi_{\mathrm{n}})$ შეიცავს ისეთ ქვემიმდევრობას $(\varphi_{\mathrm{n}_k})$, რომ ყოველი $f \in V$-სათვის მწკრივი

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty} d_k \mathrm{C}_{\mathrm{n}_k}(f)\varphi_{\mathrm{n}_k}(x)$$

თ. ყ. $(\mathrm{C}, \alpha > 0)$ შეჯამებადია $[0,1]$-ზე.
თეორემა 9-დან და მენშოვის თეორემიდან გამომდინარეობს თეორემა 10-ის სამართლიანობა.
**შენიშვნა 1.** იმ შემთხვევაში როცა $d_n = 1$, მაშინ თეორემა 4-დან გამომდინარეობს თეორემა 4 ნაშრომიდან [16].

# ეფექტურობის საკითხები კრებადობის ჭრილში

<u>**თეორემა 11(იხ.[18]):**</u> თუ ონს $(\varphi_{\mathrm{n}})$ ისეთია, რომ თანაბრად $x \in [0,1]$-ის მიმართ

$$\int_0^x \varphi_{\mathrm{n}}(t)\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right), \tag{45}$$

მაშინ ასეთი სისტემებისათვის სრულდება პირობა (3).

**დამტკიცება.**

მართლაც ვთქვათ $(a_n) \in l_2$ ნებისმიერი მიდევრობაა, ამ შემთხვევაში გვექნება

$$M_{\mathrm{n}}(a)=\max_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}}\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} P_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x\right|=\max_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}}\left|\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k\log k\int_0^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}}\varphi_k(x)\mathrm{d}x\right|=O(1)\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}|a_k|\log k\frac{1}{k}$$

$$=O(1)\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\log^2 k\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}}=O(1).$$

თეორემა 11 დამტკიცებულია.

**შენიშვნა 2:** თეორემა 11-დან გამომდინარეობს, რომ ვინაიდან ტრიგონომეტრიული და უოლშის სისტემები აკმაყოფილებენ (45) პირობას, ამიტომ მათთვის სრულდება პირობა (5)-ც.

**<u>თეორემა 12:</u>** ჰაარის $(\mathrm{X}_n)$ სისტემა აკმაყოფილებს (5) პირობას.

**დამტკიცება.**

ჰაარის სისტემის განმარტებიდან(იხ.[6]) გამომდინარე გვექნება, რომ თუ $m=2^k+l\left(1\le l\le 2^k\right)$, მაშინ ყოველი $x\in[0,1]-$ ისათვის

$$\left|\int_0^x \mathrm{X}_m(t)\mathrm{d}t\right|\le\begin{cases}2^{-\frac{k}{2}}, & \text{როცა } x\in\left(\frac{l-1}{2^k},\frac{l}{2^k}\right)\\ 0, & \text{როცა } x\notin\left(\frac{l-1}{2^k},\frac{l}{2^k}\right).\end{cases}$$

აქედან გამომდინარე თუ $(a_m)$ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობაა, მაშინ სამართლიანი იქნება უტოლობა

$$\left|\int_0^x\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m\mathrm{X}_m(t)\mathrm{d}t\right|\le 2^{-\frac{k}{2}}\left|a_{m(k)}\right|,$$

სადაც $x\in[0,1]$ და $2^k\le m(k)<\ 2^{k+1}$.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $n=2^s-1$ და $(a_n)\in l_2$ ნებისმიერი მიდევრობაა. თუ ვისარგებლებთ წინა უტოლობით და გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას მივიღებთ( $\mathrm{i}=1,2,\dots,n$)

$$\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\sum_{k=1}^{n} a_k\log k\,\mathrm{X}_k(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\sum_{m=1}^{2^s-1} a_m\log m\,\mathrm{X}_m(t)\mathrm{d}t\right|=\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m\log m\,\mathrm{X}_m(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\le\sum_{k=0}^{s-1}\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}}\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m\log m\,\mathrm{X}_m(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\sum_{k=0}^{s-1}2^{-\frac{k}{2}}\left|a_{m(k)}\right|\log m(k)=O(1)\sum_{k=0}^{s-1}\left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot k\cdot 2^{-\frac{k}{2}}$$

$$=O(1)\left(\sum_{k=0}^{s-1}\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1}a_m^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=0}^{s-1}k\cdot 2^{-\frac{k}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=O(1)$$

ანალოგიური უტოლობა სამართლიანი იქნება მაშინაც, როცა $n=2^s+p$ $(1\le p\le 2^s)$.

თეორემა 12 დამტკიცებულია.

**შენიშვნა 3.** შევნიშნოთ, რომ თეორემა 1 და თეორემა 3 სამართლიანია იმ შემთხვევაშიც, როცა $\int_0^1\varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x=0$ $(\mathrm{n}=1,2,\dots)$.

**<u>თეორემა 13:</u>** ვთქვათ $(\varphi_{\mathrm{n}})$ არის ონს $[0, 1]$-ზე და $\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x = 0$ $(\mathrm{n} = 1,2, \dots)$, მაშინ შემდეგი ორი პირობა ექვივალენტურია:

ა)$B_{\mathrm{n}}(a) = \mathrm{O}\big(e_{\mathrm{n}}(a)\big)$

და

ბ)$D_{\mathrm{n}}(a) = \mathrm{O}(1)$,

ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$-სათვის.

**დამტკიცება**

ვთქვათ შესრულებულია ა), მაშინ თეორემა A-ს თანახმად ყოველი ყოველი $f \in V$-სათვის

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}{}^2(f)\log^2 \mathrm{n} < +\infty. \tag{46}$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვიგულისხმოთ,რომ არ სრულდება ბ), მაშინ თეორემა 3-ს თანახმად იარსებებს ისეთი $h \in A$, ფუნქცია, რომ

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}{}^2(h)\log^2 \mathrm{n} = +\infty.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (46)-ს.

ანალოგიურად, როცა სრულდება ბ), შესრულდება ა)-ც.

თეორემა 13 დამტკიცებულია.

# ეფექტურობის საკითხები შეჯამებადობის ჭრილში

**<u>თეორემა 14(იხ.[19]):</u>** თუ ონს $(\varphi_{\mathrm{n}})$ ისეთია, რომ თანაბრად $x \in [0,1]$-ის მიმართ

$$\int_0^x \varphi_{\mathrm{n}}(t)\mathrm{d}t = O\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right), \tag{47}$$

მაშინ ასეთი სისტემებისათვის სრულდება პირობა (25).

**დამტკიცება.**

მართლაც ვთქვათ $(a_n) \in l_2$ ნებისმიერი მიდევრობაა, ამ შემთხვევაში გვექნება

$$\Delta_n(a) = \max_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}}\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \Gamma_{\mathrm{n}}(a,x)\mathrm{d}x\right| = \max_{1\le \mathrm{i}\le \mathrm{n}}\left|\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_{\mathrm{k}}\log(\log(k+2))\int_0^{\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}} \varphi_k(x)\mathrm{d}x\right| = O(1)\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}|a_{\mathrm{k}}|\log(\log(k+2))\frac{1}{k}$$

$$= O(1)\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\log(\log(k+2)))^2\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} = O(1).$$

თეორემა 14 დამტკიცებულია.

**შენიშვნა 4:** თეორემა 14-დან გამომდინარეობს, რომ ვინაიდან ტრიგონომეტრიული და უოლშის სისტემები აკმაყოფილებენ (47) პირობას, ამიტომ მათთვის სრულდება პირობა (25)-ც.

**<u>თეორემა 15(იხ.[6]).</u>** ჰაარის $(\mathrm{X}_n)$ სისტემა აკმაყოფილებს (25) პირობას.

**დამტკიცება.**

ჰაარის სისტემის განმარტებიდან(იხ.[4]) გამომდინარე გვექნება, რომ თუ $m = 2^k + l\big(1 \le l \le 2^k\big)$, მაშინ ყოველი $x \in [0,1] -$ ისათვის

$$\left|\int_0^x \mathrm{X}_m(t)\mathrm{d}t\right| \le \begin{cases} 2^{-\frac{k}{2}}, & \text{როცა } x \in \left(\dfrac{l-1}{2^k}, \dfrac{l}{2^k}\right) \\ 0, & \text{როცა } x \notin \left(\dfrac{l-1}{2^k}, \dfrac{l}{2^k}\right). \end{cases}$$

ამის გამო თუ $(a_m)$ რიცხვთა რაიმე მიმდევრობაა, მაშინ სამართლიანი იქნება უტოლობა

$$\left|\int_0^x \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m \mathrm{X}_m(t)\mathrm{d}t\right| \le 2^{-\frac{k}{2}}\left|a_{m(k)}\right|,$$

სადაც $x \in [0,1]$ და $2^k \le m(k) < 2^{k+1}$.

ახლა ვიგულისხმოთ, რომ $n = 2^s - 1$ და $(a_n) \in l_2$ ნებისმიერი მიდევრობაა. თუ ვისარგებლებთ წინა უტოლობით და გამოვიყენებთ კოშის უტოლობას მივიღებთ$(\, \mathrm{i} = 1,2, \dots, n)$

$$\left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \sum_{k=1}^{n} a_k \log(\log(k+2))\, \mathrm{X}_k(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \sum_{m=1}^{2^s-1} a_m \log(\log(m+2))\, \mathrm{X}_m(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$= \left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \sum_{k=0}^{s-1} \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m \log(\log(m+2))\, \mathrm{X}_m(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \sum_{k=0}^{s-1} \left|\int_0^{\mathrm{i}/\mathrm{n}} \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m \log(\log(m+2))\, \mathrm{X}_m(t)\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{s-1} 2^{-\frac{k}{2}}\left|a_{m(k)}\right| \log(\log(m(k))) = O(1) \sum_{k=0}^{s-1} \left(\sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot k \cdot 2^{-\frac{k}{2}}$$

$$= O(1) \left(\sum_{k=0}^{s-1} \sum_{m=2^k}^{2^{k+1}-1} a_m^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{s-1} k \cdot 2^{-\frac{k}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = O(1)$$

ანალოგიური უტოლობა სამართლიანი იქნება მაშინაც, როცა $n = 2^s + p, (1 \le p \le 2^s)$.

თეორემა 15 დამტკიცებულია.

**<u>თეორემა 16(იხ.[19]).</u>** ვთქვათ $(\varphi_\mathrm{n})$ არის ონს $[0,1]$-ზე და

$$\int_0^1 \varphi_\mathrm{n}(x)\mathrm{d}x = 0 \ (\mathrm{n} = 1,2, \dots).$$

მაშინ ნებისმიერი $(a_n) \in l_2$ მიმდევრობებისათვის ექვივალენტურია შემდეგი ორი პირობება
ა)$B_\mathrm{n}(a) = \mathrm{O}\big(e_\mathrm{n}(a)\big)$ (იხ. თეორემა A)
და
ბ)$\Delta_\mathrm{n}(a) = \mathrm{O}(1)$, (იხ.(25)).

**დამტკიცება**

ვთქვათ შესრულებულია ა), მაშინ თეორემა A-ს თანახმად ყოველი ყოველი $f \in V$-სათვის

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}{}^{2}(f)\,(\log(\log(n+2)))^{2} < +\infty. \tag{48}$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვიგულისხმოთ,რომ არ სრულდება ბ), მაშინ თეორემა 8-ს თანახმად იარსებებს ისეთი $h \in A$, ფუნქცია, რომ

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} C_{\mathrm{n}}{}^{2}(h)\,(\log(\log(n+2)))^{2} = +\infty.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (48)-ს.

ანალოგიურად, როცა სრულდება ბ), შესრულდება ა)-ც.

თეორემა 16 დამტკიცებულია.

თეორემა 16-დან გამომდინარეობს, რომ თეორემები 1 და 2 უფრო ზოგადია ვიდრე A და B, ვინაიდან თეორემები 6 – C და 7 - D ექვივალენტურია იმ შემთხვევაში, როცა $\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x = 0$ $(\mathrm{n} = 1,2,\dots)$, ანუ იმ პირობებში, რომელიც მოთხოვნილია C და D თეორემებში. ხოლო თეორემებში 1 და 2 მოთხოვნილია უფრო სუსტი პირობა

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{k}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log\log \mathrm{k})^2 < +\infty.$$

<u>**შენიშვნა 5:**</u> ვთქვათ შესრულებულია თეორემა 8-ის პირობები

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\int_0^{\frac{\mathrm{i_n}}{\mathrm{n}}} \Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x\right| = +\infty. \tag{49}$$

და

$$\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{k}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(\mathrm{k}+2)))^2 < +\infty,$$

მაშინ $\mathrm{i_n} \neq \mathrm{n}-1$. სინამდვილეში, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, რომ $\mathrm{i_n} = \mathrm{n}-1$, მივიღებთ

$$\int_0^{\frac{\mathrm{i_n}}{\mathrm{n}}} \Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x = \int_0^{1-\frac{1}{\mathrm{n}}} \Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x - \int_{1-\frac{1}{\mathrm{n}}}^1 \Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x. \tag{50}$$

ლემა 4-ის თანახმად

$$\left|\int_0^1 \Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x\right| \le \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} b_k^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\left(\int_0^1 \varphi_{\mathrm{n}}(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2\right)^{1/2} = O(1) \tag{51}$$

მეორესმხრივ ლემა 3-დან გამომდინარეობს რომ

$$\left|\int_{1-\frac{1}{\mathrm{n}}}^1 \Gamma_{\mathrm{n}}(b,x)\mathrm{d}x\right| = O(1).$$

აქედან გამომდინარე (50)-დან და (51)-დან გვაქვს

$$\left|\int_0^{\frac{i_n}{n}} \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = O(1).$$

რაც ეწინააღმდეგება (49)-ს.

**<u>შენიშვნა 6:</u>** დავუშვათ $(\varphi_n)$ არის ონს $[0,1]$-ზე და $(\varphi_n)$ ფუნქციები პერიოდულია პერიოდით $1$. მაშინ თუ

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2 = +\infty,$$

გვექნება, რომ თეორემა 8 სამართლიანია $h(x)=1$ პერიოდული ფუნქციისათვის, რადგან რიცხვები $\int_0^1 \varphi_n(x)\mathrm{d}x$ აღნიშნული ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტებია.

თუკი

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_k(x)\mathrm{d}x\right)^2 (\log(\log(k+2)))^2 < +\infty,$$

მაშინ თეორემა 8-ში $f_n$ ფუნქციებს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{როცა } x \in \left[0, \frac{i_n}{n}\right] \text{ და } x = 1 \\ 1, \text{როცა } x \in \left[\frac{i_n+1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right] \\ \text{უწყვეტი და წრფივი}, \text{როცა } x \in \left[\frac{i_n}{n}, \frac{i_n+1}{n}\right] \cup \left[1-\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}.$$

თუ გავითვალისწინებთ შენიშვნა 4-ს, გვექნება

$$\left|f_n\left(1-\frac{1}{n}\right) - f_n(1)\right| \left|\int_0^{i/n} \Gamma_n(b,x)\mathrm{d}x\right| = O(1)$$

თუ დამტკიცებას გავაგრძელებთ თეორემა 8-ის ანალოგიურად დავრწმუნდებით, რომ არსებობს პერიოდული ფუნქცია $h \in A$ პერიოდით $1$, რომლისთვისაც სრულდება პირობა

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\,2}(h)\,(\log(\log(n+2)))^2 = +\infty.$$

# ლიტერატურა

[1] G. Alexits, Convergence Problems of Orthogonal Series, Translated from the German by I. Földer. International Series of Monographs in Pure and Applied Mathematics, Vol. 20. Pergamon Press, New York-Oxford-Paris, 1961.

[2] D. E. Menshov, Sur les series des functions orthogonales I, Fundam. Math., 4 (1923), 82-105.

[3] W. Orlitz, Zur theorie der Orthogonalen, Bull. Intern. Acad. Sci. Polonaise Cracovie, (1927).81-115.

[4] S. Kaczmarz, Uber die konvergenz der Reihen von Orhogonalfunctionen, Math. Z. 23. (1925)163-170.

[5] K. Tandori, Uber die Orthogonalen Functionen, Acta Sci. Math. 18 (1957). 57-130.

[6] P. L. Ul'yanov, Weyl factors for unconditional convergence, Sb. Math. 1963 v.60,N1. 39-62.

[7] A. Olevski, Orthogonal series in terms of complete systems, Mat. Sb. (N.S.)58 (100) 1962, 707_748 (in Russian).

[8] S. V. Bochkarev, Absolute convergence of Fourier series with respect to complete orthonormal systems, Russian Math. Surveys, vol.27. no.2. (1972). 55-81.

[9] J. R. Mclauhglin, Integrated orthonormal series, Pacific J. Math. Vol.42, (1972). 464-472.

[10] B. S. Kashin, On Weyl's multipliers for almost everywhere convergence of orthogonal series, Annal. Math. 1976 v2, N4. 249-266.

[11] L. Gogoladze, On the problem of reconstructing the coefficients of convergent multiple function series, Izvestya RAN, ser. math. vol. 72, N2 (2008). 283-290.
[12] V. Sh. Tsagareishvili, Absolute convergence of Fourier series of functions of class Lip1 and functions of bounded variation, Izv. Math. vol.76, no.2, (1012). 419-429.
[13] S. Banach, Sur les divergence des series orthogonales, Studia Math, (1940), vol.9. 139-155.
[14] L. Gogoladze, V. Tsagareishvili, Convergence of Fourier series of functions of class Lip1, with respect to general orthonormal systems, Ukr. Math. J. (2017), no 4, 546-560.
[15] L. Gogoladze, V. Tsagareishvili, Unconditional convergence of Fourier series for functions of bounded variation, Sib. Math. J.(2018), vol. 59, 65-72
[16] L. Gogoladze, V. Tsagareishvili, Some classes of functions and Fourier coefficients with respect to general orthonormal systems, Proced. of the Steklov inst. of math. (2013), vol. 280, 156-168.
[17] L. Gogoladze, V. Tsagareishvili, Summability of general Fourier series, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, 2015, 52(4), 511-536.
[18] L. Gogoladze, G. Cagareishvili, General Fourier coefficients and almost everywhere convergence, Izvestia Mathematics, 2021, N85(2). p.60-72.
[19] G. Cagareishvili, General Fourier coefficients and problems of summability almost everywhere, Ann. Polonici Math. 126, 2, 2021. p.113-128.

# სარჩევი